Algoritmos matemáticos sobre matrices:

Representaciones especiales de matrices, Algoritmo de Strassen, multiplicación y triangulación de matrices

Jose Aguilar

Matriz

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos (números reales) ordenados en filas y columnas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} es el elemento situado en la i-ésima fila y en la j-ésima columna. La matriz tiene *m* filas y *n* columnas.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -8 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x5}$$

✓ B es una matriz de orden 2x5.

Matriz

Las matrices son de suma importancia en las ciencias, como la ingeniería, la economía y otras ciencias aplicadas.

Son útiles para representar datos en forma ordenada, para modelar problemas y resolver sistemas de ecuaciones, etc.

Cotización del Oro
(Londres, US$/oz.)

	20-Mar-06	**21-Mar-06**	**22-Mar-06**	**23-Mar-06**	**24-Mar-06**
09:00	553.1	554.1	551.1	551.7	554.2
10:00	551.4	548.2	550.1	549.8	556.4
11:00	554.2	549.7	550.3	547.9	560.2
12:00	555.0	550.3	550.7	547.6	559.7

Igualdad de matrices

Dos matrices A y B del **mismo orden** son iguales si todos sus elementos correspondientes son iguales.

$$A_{mxn} = B_{mxn} \Leftrightarrow \left[a_{ij}\right] = \left[b_{ij}\right]$$

Matrices especiales: *Matriz fila y matriz columna*

Las matrices filas son las de orden *1xn* y las matrices columnas son las de orden *mx1 (vectores)*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

- ✓ B es una matriz columna.
- ✓ A es una matriz fila.

Matrices especiales: *Matriz diagonal*

Es la matriz cuadrada $A_{nxn} = [a_{ij}]$ definida por:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Matrices especiales: *Matriz identidad*

Es un caso particular de la matriz diagonal, en la cual los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada

Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir ***m = n***. En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden *n*, y no ***n x n***.

Los elementos a_{ij} con $i = j$, o sea a_{ii} forman la llamada diagonal principal de la matriz cuadrada, y los elementos a_{ij} con $i + j = n + 1$ la diagonal secundaria.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrices especiales: *Matriz Triangular*

Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal.

Matriz triangular inferior: es una **matriz cuadrada** cuyos elementos situados por **encima** de la diagonal principal son todos iguales a cero.

$$a_{ij} = 0, \ \forall i < j$$

Matriz triangular superior: es una **matriz cuadrada** cuyos elementos situados por **debajo** de la diagonal principal son todos iguales a cero.

$$a_{ij} = 0, \ \forall i > j$$

Matriz transpuesta

Dada una matriz $A_{mxn} = [a_{ij}]$, llamaremos matriz transpuesta de A a la matriz que resulta de intercambiar en A las filas por columnas. Esta matriz estará denotada por $A^t_{nxm} = [a_{ji}]$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

$$1)\ \left(A^t\right)^t = A$$

$$2)\ \left(kA\right)^t = kA^t,\ k \in R$$

$$3)\ \left(A \pm B\right)^t = A^t \pm B^t$$

$$4)\ \left(A.B\right)^t = B^t.A^t$$

Matrices especiales: *Matriz simétrica y antisimétrica*

Una matriz **cuadrada** A se llama simétrica si $A^t = A$ y antisimétrica si $A^t = -A$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 7 & 2 \\ 4 & -7 & 0 & -6 \\ -3 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- ✓ A es una matriz simétrica, pues $A^t = A$.
- ✓ B es una matriz antisimétrica, pues $B^t = -B$.

Operaciones con matrices

Transposición de matrices

Suma y diferencia de matrices

Producto de una matriz por un número

Propiedades simplificativas

Producto de matrices

Matrices inversibles

Operaciones con matrices

Suma y diferencia de matrices

La suma de dos matrices A=(a*ij*), B=(*bij*) de la misma dimensión, es otra matriz S=(*sij*) de la misma dimensión que los sumandos y con término genérico *sij=aij+bij*. Por tanto, para poder sumar dos matrices estas han de tener la misma dimensión.

La suma de las matrices A y B se denota por A+B.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ no se pueden sumar.

La diferencia de matrices A y B se representa por A–B, y se define como: A–B = A + (–B)

Operaciones con matrices

Propiedades de la suma de matrices

1ª. **A + (B + C) = (A + B) + C** — *Propiedad Asociativa*

2ª. **A + B = B + A** — *Propiedad conmutativa*

3ª. **A + 0 = A (0 es la matriz nula)** — *Matriz Nula*

4ª. La matriz –A, que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de A, recibe el nombre de matriz opuesta de A, ya que A + (–A) = 0.

Operaciones con matrices

Producto de una matriz por un número

El producto de una matriz *A* = *(aij)* por un número real *k* es otra matriz *B* = *(bij)* de la misma dimensión que *A* y tal que cada elemento *bij* de *B* se obtiene multiplicando *aij* por *k*, es decir, *bij* = *k·aij.*

Ejemplo:

$$3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 0\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 1 & 3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\ 12 & 3 & 9\end{pmatrix}$$

El producto de la matriz *A* por el número real *k* se designa por *k·A*. Al número real *k* se le llama también escalar, y a este producto, *producto de escalares por matrices*

Operaciones con matrices

Propiedades del producto de una matriz por un escalar

1ª. $k\,(A + B) = k\,A + k\,B$ — ***Propiedad distributiva 1ª***

2ª. $(k + h)A = k\,A + h\,A$ — ***Propiedad distributiva 2ª***

3ª. $k\,[h\,A] = (k\,h)\,A$ — ***Propiedad asociativa mixta***

4ª. $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$ — ***Elemento unidad***

Operaciones con matrices

Propiedades simplificativas

Si $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$

Si $k\,A = k\,B \Leftrightarrow A = B$ si k es distinto de 0

Si $k\,A = h\,A \Leftrightarrow h = k$ si A es distinto de 0

Matrices por bloques

a11	a12	a13	a14
a21	a22	a23	a24
a31	a32	a33	a34
a41	a42	a43	a44

b11	b12
b21	b22
b31	b32
b41	b42

Matrices por bloques

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Strassen
y multiplicación de matrices

Jose Aguilar

Operaciones con matrices

Producto de matrices

Dadas dos matrices *A* y *B*, su producto es otra matriz *P* cuyos elementos se obtienen multiplicando las filas de A por las columnas de *B*. De

Es evidente que el número de columnas de *A* debe coincidir con el número de filas de *B*.

Si *A* tiene dimensión ***m*** *x* ***n*** y *B* dimensión ***n*** *x* ***p***, la matriz *P* será de orden ***m*** *x* ***p***:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$ no se pueden multiplicar

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

Sean $\boldsymbol{A}=\{a_{ik}\}$ una matriz de dimensión mxn y $\boldsymbol{B}=\{b_{kj}\}$ una matriz de dimensión nxs. El producto $\boldsymbol{AB}$ es la matriz $\boldsymbol{C}=\{c_{ij}\}$ de dimensión mxs, donde la entrada c_{ij} de $\boldsymbol{C}$ es el producto punto de la i-ésima fila de $\boldsymbol{A}$ y la j-ésima columna de $\boldsymbol{B}$.

Ejemplo:

Fila 2

Columna 3

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \boxed{-3 \quad 5 \quad 8} \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 8 & \boxed{5} & 4 \\ -6 & -4 & \boxed{0} & 4 \\ -4 & -5 & \boxed{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 10 & 4 \\ -71 & -84 & \boxed{1} & 16 \\ -74 & -68 & 16 & 36 \end{pmatrix}$$

Posición c_{23}

(-3)(5) + (5)(0) + (8)(2) = 1

Producto de matrices

En general, el elemento c_{ij} está dado por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj};$$

$$i = 1, \ldots, m$$

$$j = 1, \ldots, s$$

Por ejemplo, si $\boldsymbol{A_{3x4}}$, $\boldsymbol{B_{4x7}}$, $\boldsymbol{C_{7x3}}$, los productos $\boldsymbol{AB_{3x7}}$, $\boldsymbol{BC_{4x3}}$ y $\boldsymbol{CA_{7x4}}$ están definidos, mientras que no es posible multiplicar ***BA***, ***AC*** y ***CB***. Debe observarse que el producto de matrices en general no es conmutativa, esto es, aún cuando los productos ***AB*** y ***BA*** están definidos, no es necesariamente cierto que ***AB=BA***, como muestra el siguiente ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -8 & -17 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 13 & -16 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

Propiedades del producto de matrices

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (Propiedad asociativa)

El producto de matrices en general no es conmutativo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 14 & 22 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix}$$

Si A es una matriz cuadrada de orden n se tiene $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.

Dada una matriz cuadrada A de orden n, no siempre existe otra matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Si existe dicha matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa por A^{-1} .

El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices, es decir: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Algoritmo secuencial

- Caso matrices cuadradas.

```
for (i = 0; i < n; i++) {
        for (j = 0; i < n; j++) {
                c[i][j] = 0;
                for (k = 0; k < n; k++) {
                        c[i][j]   += a[i][k] * b[k][j]
                }
        }
   }
```

n^3 multiplicaciones y n^3 sumas → O (n^3)

Implementación recursiva

- La división en submatrices sugiere una estrategia recursiva de divide y vencerás, que puede ser especialmente ventajoso en sistemas de memoria compartida.
- La ventaja de esta estrategia es que en cada paso de recursión, los datos transmitidos son más pequeños y están más localizados.

Divide y venceras

La técnica “divide y vencerás” (DV) consiste en:

- Descomponer el problema que hay que resolver en cierto numero de subproblemas mas pequeños del
- mismo tipo.
- Resolver de forma sucesiva e independiente todos estos subproblemas.
- Combinar las soluciones obtenidas para obtener la solución del problema original.

Características de los problemas resolubles utilizando “divide y vencerás”

- El problema se puede descomponer en otros del mismo tipo que el original y de tamaño mas pequeño
- (formulación recursiva).
- Los subproblemas pueden resolverse de manera independiente.
- Los subproblemas son disjuntos, sin solapamiento.
- La solución final se puede expresar como combinación de las soluciones de los subproblemas.

Método general “divide y vencerás”

```
function DYC(x)
IF x es suficientemente simple
    RETURN algoritmoBasico(x)
ELSE
    descomponer x en x[1],x[2],...,x[s]
    FOR i ::= 1 TO s
            y[i] ::= DYC(x[i])
    ENDFOR
    combinar y[i] en una solución y a x
    RETURN y
ENDINF
```

Algoritmo de multiplicación de Strassen

Cómo calcular el producto de dos matrices de dos por dos usando menos multiplicaciones que con el método tradicional

Dadas dos matrices

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

podemos poner……

$m_1 = (a_{21} + a_{22} - a_{11})(b_{22} - b_{12} + b_{11})$

$m_2 = a_{11} b_{11}$

$m_3 = a_{12} b_{21}$

$m_4 = (a_{11} - a_{21})(b_{22} - b_{12})$

$m_5 = (a_{21} + a_{22})(b_{12} - b_{11})$

$m_6 = (a_{12} - a_{21} + a_{11} - a_{22}) b_{22}$

$m_7 = a_{22}(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})$

Entonces el producto AB queda:

$$\begin{vmatrix} m_2 + m_3 & m_1 + m_2 + m_5 + m_6 \\ m_1 + m_2 + m_4 - m_7 & m_1 + m_2 + m_4 + m_5 \end{vmatrix}$$

Este procedimiento requiere 7 multiplicaciones para cacular el producto de A y B *(pero más sumas que el método tradicional!!).*

Algoritmo de multiplicación de Strassen

- Si reemplazamos cada elemento de A y B por una matriz de n x n, las fórmulas anteriores nos dan una forma de multiplicar dos 2n X 2n matrices.

- A partir de esto tenemos un método recursivo para calcular el producto de matrices con n potencia de 2.

- Este método se puede generalizar también a matrices cuyas dimensiones no sean de la forma 2n

Triangulación

Jose Aguilar

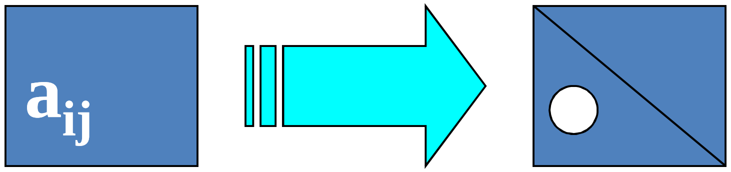
Sistema triangular superior

- Los coeficientes por debajo de la diagonal principal son ceros

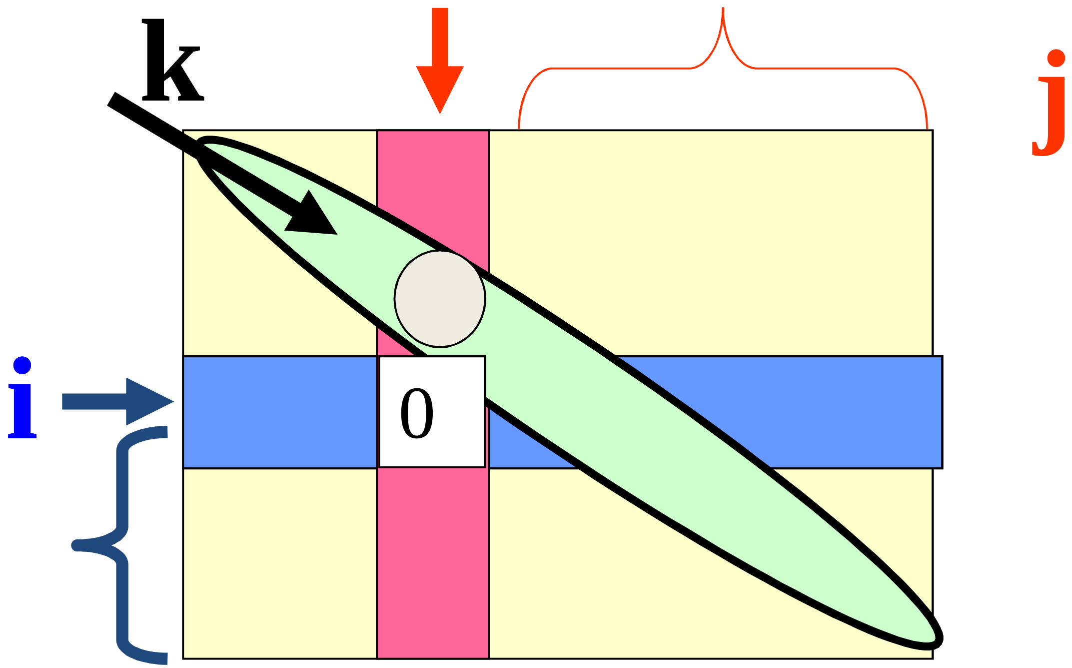
2	1	-1
0	1.5	1.5
0	0	1

Triangulación diagonal superior

- Operaciones elementales sobre las filas
- Obtener ceros por debajo de la diagonal principal



Índices



- **k:** pivote debajo del cual se van a obtener los ceros de la matriz triangular
- **i:** fila a transformar que tendrá un cero debajo del pivote en la diagonal
- **j:** para recorrer la fila **i** y hacer las transformaciones

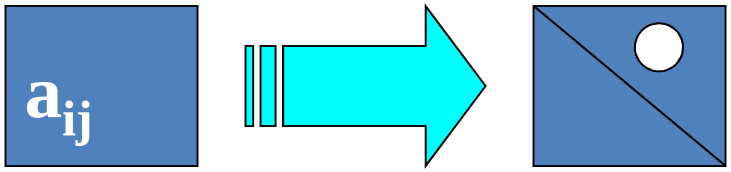
Triangulación diagonal superior

```
'triangular superior
Public Sub tpsup(x() As Double, ByVal n1 As Integer, ByVal n2 As Integer)

For k = 1 To n1 – 1   ‘Inicia recorrido pivotes
    For i = k + 1 To n1          ‘Inicia recorrido filas
        m = x(i, k) / x(k, k)       ‘múltiplo
        For j = k To n1  ‘Inicia recorrido columnas
            x(i, j) = x(i, j) - m * x(k, j)
```

Triangulación diagonal inferior

- Operaciones elementales sobre las filas
- Obtener ceros por encima de la diagonal principal



Triangulación diagonal inferior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Triangulación diagonal inferior

j= 1..n índice columnas

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{pmatrix}
$$

i = k-1..1
Índice filas

Pivotes:
k=n1..2

Triangulación diagonal inferior

```
triangular inferior
Public Sub tpinf(x() As Double, ByVal n1 As Integer, ByVal n2 As Integer)

For k = n1 To 2 Step -1
    For i = k – 1 to To 1 Step -1
        m = x(i, k) / x(k, k)
        For j = 1 To n1
            x(i, j) = x(i, j) - m * x(k, j)
```

Para tres ecuaciones y tres incógnitas

$$2X_1 + X_2 - X_3 = 3 \qquad \text{Ec. 1}$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 6 \qquad \text{Ec. 2}$$

$$2X_1 - X_2 + X_3 = 5 \qquad \text{Ec. 3}$$

Para transformar A en una matriz triangular superior:

- Eliminar x_1 de las ecuaciones 2 y 3, utilizando la ecuación 1

$$2X_1 + X_2 - X_3 = 3$$

$$0X1 + (3/2)X2 + (3/2)X3 = 9/2$$

$$0X1 + (-2)X2 + (2)X3 = 2$$

Ec. 1

Ec. 2' = Ec.2 - (1/2) Ec.1

Ec. 3' = Ec.3 – (2/2)Ec.1

Transformar A en una matriz triangular superior

Eliminar x_2 de la ecuación 3 utilizando la ecuación 2:

$$2X_1 + X_2 - X_3 = 3$$ Ec. 1

$$0X1 + (3/2)X2 + (3/2)X3 = 9/2$$ Ec. 2'

$$0X1 + 0X2 + (4)X3 = 8$$

Ec. 3'' = Ec.3' - (-4/3)Ec.2'

Sistema equivalente resultante:

$2X_1 + X_2 - X_3 = 3$ Ec. 1

$0X1 + 1.5\ X2 + 1.5\ X3 = 4.5$ Ec. 2’

$0X1 + 0X2 + 1\ X3 = 2$ Ec. 3’’