Grafos: Caminos más cortos, II

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Diseño y Análisis de Algoritmos

Cátedra de Programación

Carrera de Ingeniería de Sistemas

Prof. Isabel Besembel Carrera

Algoritmo de Bellman-Ford

- Resuelve el problema de los caminos más cortos en el caso general donde los pesos pueden ser negativos
- Usa programación dinámica.
- Regresa un valor lógico para indicar:
  - *Verdadero*, no hay ciclos con peso negativo alcanzables desde **s** y produce los caminos mínimos con sus pesos
  - *Falso*, si los hay, por lo cual no hay solución.

Algoritmo de Bellman-Ford

26/11/98

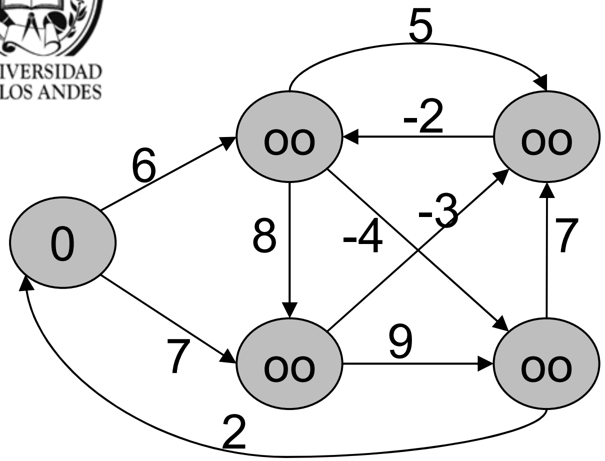
C+CBellmanFord(Nodo: s): Lógico

{pre: $n > 0 \wedge s \in N$ }   {pos: $n > 0$ }

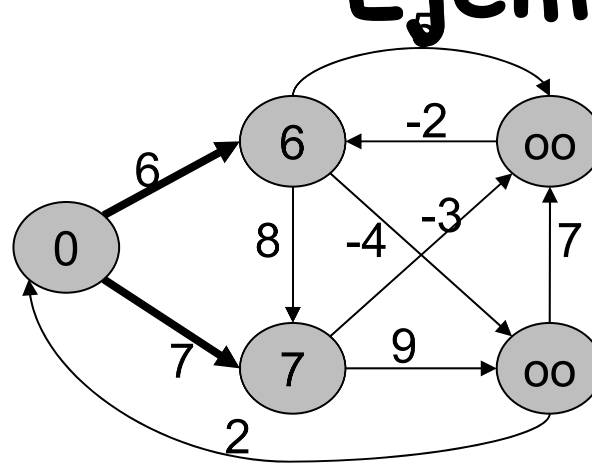
1	iniciar(s)	O(N)	**-iniciar(), relajar():** Operaciones de la clase Grafo.
2	[[relajar(u, v, w)] $(u, v) \in A$] $i = 1, N - 1$	$\Theta(A)$	**-i:** Entero. Subíndice.
3	[Si (v.D() > u.D() + w(u, v)) entonces regresar Falso fsi] $(u, v) \in A$	O(A)	**-D(), Padre().** Operaciones de la clase Nodo.
4	regrese Verdadero		

$$T(n) = O(N\ A)$$

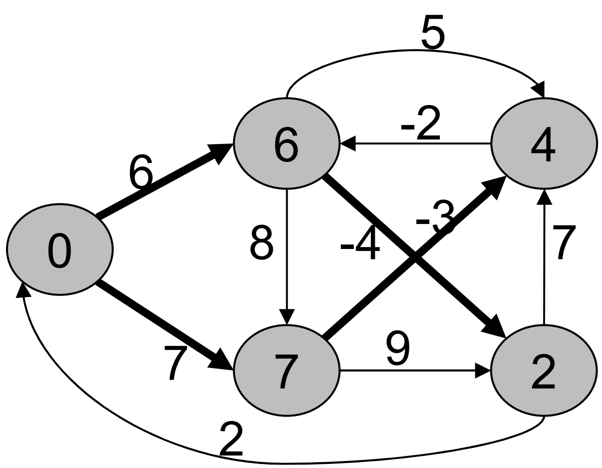
Ejemplo



Inicio

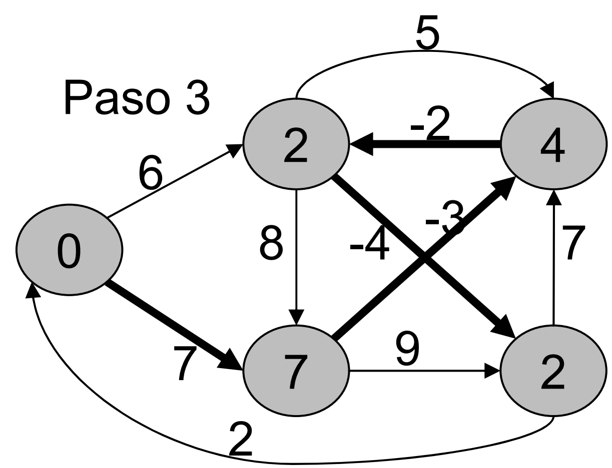


Paso 1

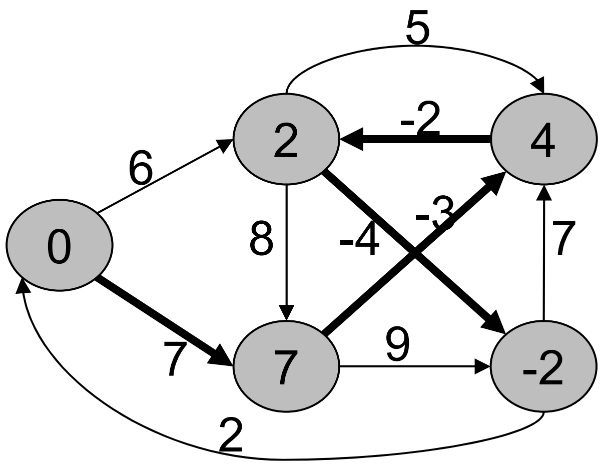


Paso 2

Paso 3

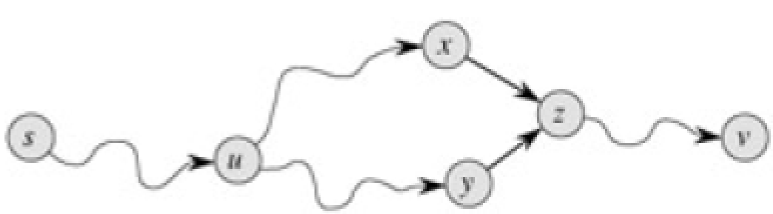


Ejemplo



Fin y regresa Verdadero

Prueba del lema 16: Usando la propiedad de la relajación.



- Lema 16: Sea G=(N,A) un digrafo etiquetado y asuma que G contiene ciclos no negativos alcanzables desde s. Luego de |N|-1 iteraciones en el lazo 2 del algoritmo C+CBellmanFord, se tiene $d[v] = \delta(s, v)\ \forall\ v$ alcanzable desde s

Corrección del algoritmo de Bellman-Ford

- **Corolario 16**: Para cada v ∈ N hay un camino de **s** a **v** si y solo si, el algoritmo de Bellman-Ford termina con $d(v) < \infty$ cuando se ejecuta en G.
- **Teorema 16**: Sea G=(N,A) un digrafo etiquetado con w:A->R, con origen s.
  - Si G no tiene ciclos negativos alcanzables desde s, el algoritmo C+CBellmanFord regresa Verdadero y se tiene $d[v]=\delta(s, v)\ \forall\ v \in N$, con el árbol de los caminos mínimos desde **s**.
  - Si G contiene un ciclo negativo alcanzable desde s, entonces regresa Falso.

Demostración del teorema 16

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

- Suponga que G no contiene ciclos negativos alcanzables desde s.
  - Al finalizar el algoritmo $d[v] = \delta(s, v)\ \forall\ v \in N$.
    - Si el nodo v es alcanzables desde s, entonces el lema 16 lo prueba.
    - Si v no es alcanzable desde s, entonces no hay camino desde s a v.
    - Ninguna de las condiciones del paso 3 hace que el algoritmo regrese Falso, por lo tanto regresa Verdadero
    - $D[v] = \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v) = d[u] + w(u, v)$

Demostración (continuación)

- Suponga que G contiene un ciclo negativo alcanzable desde s, sea ese ciclo c=<n_0, n_1, … n_k>, donde $n_0=n_k$, entonces

  (1) $$\sum_{i=1}^{k} w(n_{i-1}, n_i) < 0$$

- Asuma por contradicción que el algoritmo regresa Falso.
- Así, d[ni]≤d[ni-1]+w(ni-1, ni) para i=1, 2, …, k

$$\sum_{i=1}^{k} d[n_i] \le \sum_{i=1}^{k} (d[n_{i-1}] + w(n_{i-1}, n_i)) = \sum_{i=1}^{k} d[n_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} w(n_{i-1}, n_i)$$

- Como $n_0=n_k$, cada nodo aparece exactamente una vez en cada suma y

  $\sum_{i=1}^{k} d[n_i] = \sum_{i=1}^{k} d[n_{i-1}]$ y por el corolario 16 $d[n_i]$ es finito y

  $0 \le \sum_{i=1}^{k} w(n_{i-1}, n_i)$

  Que contradice (1). q.e.d

Camino más corto desde un nodo fuente en un dag etiquetado

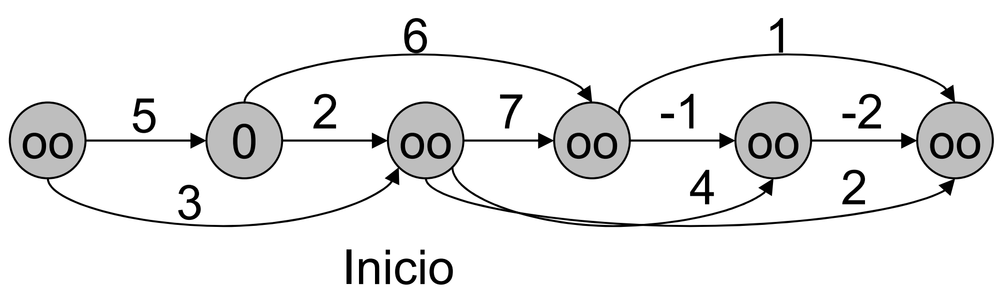
- El C+C está siempre bien definido por ser un dag, aún si tiene pesos negativos.
- Se relajan los nodos en base a un ordenamiento topológico de los mismos, calculando el C+C desde **s** en $\Theta(N + A)$.
- Si hay un camino desde **u** hasta **v** en G, entonces **u** precede a **v** en el orden topológico.

Algoritmo para caminos mínimos en dag etiquetado

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

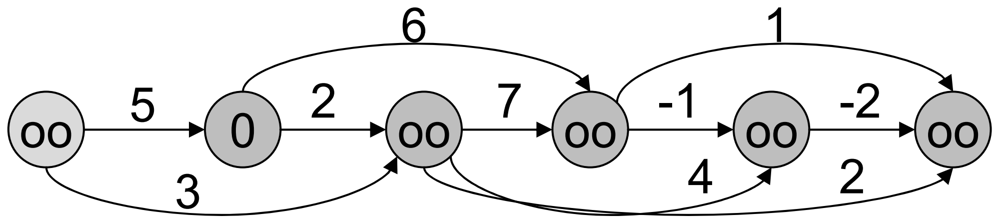
26/11/98 C+Cdag(Nodo: s) {pre: $n > 0 \wedge s \in N$ } {pos: $n > 0$ }	
lot = ordenTopologico( ) $\Theta(N+A)$ iniciar(s) $\Theta(N)$ [[relajar(u, v, w)] $v \in$ listaAdy(u)] $u \in$ lot	**-iniciar(), relajar(), ordenTopologico():** Operaciones de la clase Grafo. **-lot:** ListaDe [Entero]. Lista de nodos en orden topológico.

T(n) = Θ(N + A).

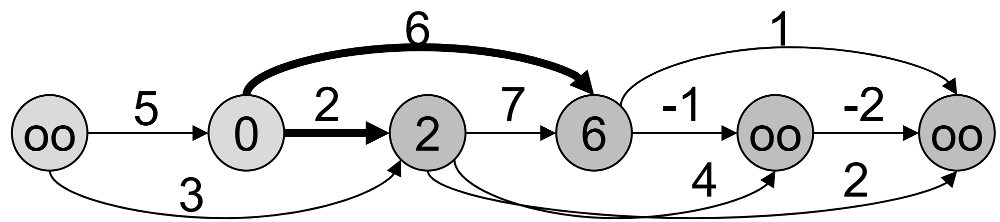


UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

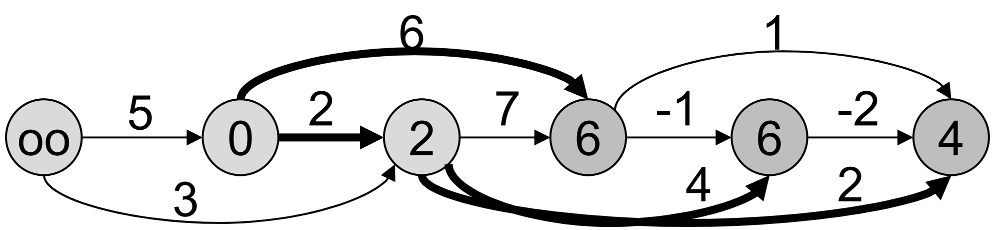
Ejemplo



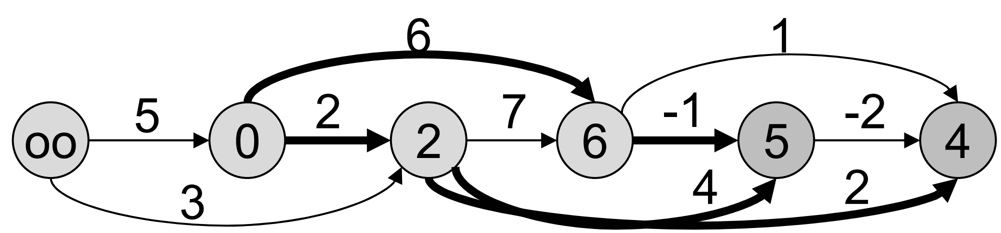
Paso 1



Paso 2



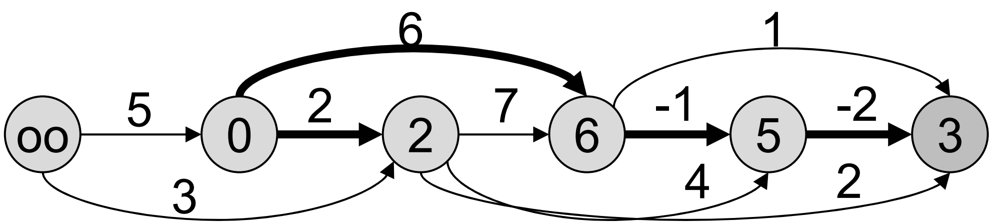
Paso 3



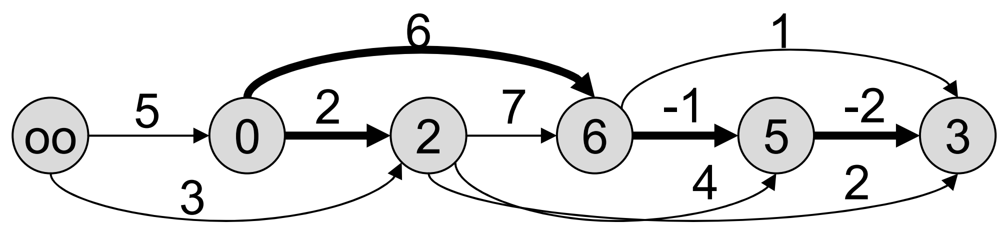
Paso 4

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Ejemplo



Paso 5



Paso final

Los nodos se ordenan topológicamente de izquierda a derecha, desde el nodo fuente s.
Los valores de d se muestran dentro de los nodos y los arcos resaltados forman el subgrafo predecesor almacenado en el vector padre

Corrección del algoritmo C+Cdag

- **Teorema**: Si a un dag etiquetado G =(N, A) con un nodo fuente **s** y sin ciclos se le ejecuta el procedimiento C+Cdag(s) entonces $d(v) = \delta(s, v)$ $\forall\ v \in N$ y $G\pi$ es el árbol del C+C cuya raíz es **s**.
- **Aplicación:** PERT donde un camino crítico es el camino más largo de G. Se usa el mismo algoritmo pero:
  - negando los pesos de G, o
  - reemplazando ∞ con $-\infty$ en iniciar(s) y ">" con "<" en relajar(u, v, w)