

REDUCCIONES LINEALES

Nelson Ricardo Grimaldos Baptista

Reducciones Lineales

- Comparar Dificultades Relativas de Problemas Diferentes
- Un problema se *reduce* a otro si podemos transformar casos del primer problema en casos del segundo
- Cualquier mejora en uno de ellos da lugar a un algoritmo más eficiente para los demás

Cuadrado Vs Multiplicación

- Schönhage y Strassen $O(n \log n \log \log n)$
- Multiplicar al menos $\Omega(n)$
- ¿Será posible elevar al cuadrado en tiempo lineal?

$$x^2 = x \times x \qquad x \times y = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$$

$$x \times x = \frac{(x+x)^2 - (x-x)^2}{4} = \frac{4x^2}{4} = x^2$$

Cuadrado Vs Multiplicación

función *cuadrado(x)*

devolver *mult(x,x)*

función *mult(x,y)*

devolver *(cuadrado(x+y)- cuadrado(x-y))/4*

$$S(n) \leq M(n) + c \Rightarrow S(n) \in O(M(n))$$

$$M(n) \leq S(n+1) + S(n) + f(n)$$

$$T(S(n)) = \Theta(n!) \Rightarrow T(M(n)) = \Theta((n+1)!)$$

Cuadrado Vs Multiplicación

1000x1=1000		999 x1=999/4	...	2x1=2	1x1=1
1000x2=2000		999x2=1998		2x2=2	
1000x3=3000		1 999x3=2997			
1000x4=4000		2 999x4=3996			
1000x5=5000		3 999x5=4995			
1000x6=6000		999x6=5994			
.		.			
.		.			
.		.			
1000x999=999000		999x998=997002			
1000x1000=1000000		1999x999=999000.25			
		999x999=998001			
		2000x999=1000000			

Definiciones Formales

- **A** es linealmente reducible a **B** ($A \leq^L B$) si acotando **B** en $O(t(n))$ implica que acotamos **A** en $O(t(n))$
- Si funciona en ambos sentidos son linealmente equivalentes
- Casos requeridos para el problema **B** son del mismo tamaño que el caso original del problema **A**
- La cantidad de trabajo adicional no es mayor

Definiciones Formales

- Diferencias de tamaños en los casos de **A** y de **B**
- Un algoritmo es *suave* si requiere $\Theta(t(n))$ para alguna función suave $t(n)$
- f es suave si es eventualmente no decreciente y $f(bn) \in O(f(n))$
- t es al menos cuadrática si $t(n) \in \Omega(n^2)$ y será *fuertemente cuadrática* si es no decreciente y $t(an) \geq a^2t(n)$

+ Cuadrado Vs Multiplicación

$$S(n) \leq M(n) + c$$

$$M(n) \leq S(n+1) + S(n) + f(n)$$

$$M(n) \geq c \therefore S(n) \leq 2M(n)$$

$$S(n) \in O(M(n)) \therefore SQR \leq^{\ell} MLT$$

$$S(n) \in \Theta(s(n)) \left\{ \begin{array}{l} s(2n) \leq as(n) \\ S(n) \leq b_1 s(n) \\ s(n) \leq b_2 S(n) \end{array} \right.$$

$$S(n+1) \leq b_1 s(n+1) \leq b_1 s(2n) \leq b_1 as(n) \leq b_1 ab_2 S(n)$$

$$M(n) \in O(S(n))$$

$$MLT \leq^{\ell} SQR$$

Reducciones entre Problemas Matriciales

Matriz Cuadrada

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Traspuesta

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Reducciones entre Problemas Matriciales

- Basta un tiempo en $O(n^{2.81})$ para multiplicar dos matrices $n \times n$
- **MQ**: Matrices Cuadradas
- **MT**: Matrices Triangulares Superiores
- **MS**: Matrices Simétricas
- **IT**: Inversión de Matrices Triangulares Superiores

$MT \leq^L MQ$ $MS \leq^L MQ$ $MQ \leq^L MT$ $MQ \leq^L MS$ $MQ \leq^L IT$ $IT \leq^L MQ$

$MQ \equiv^L MT$ $MQ \equiv^L MS$ $MQ \equiv^L IT$

MQ \leq^L MT (MT suave)

- $O(t(m)|m)$ es una potencia de 2)
- $t(m)$ suave

$$\begin{bmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & AB \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 34 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \right.$$

$MQ \leq^L MS$ (MS suave)

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & A^T B^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 0 & 0 \\ 34 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 26 \\ 0 & 0 & 13 & 31 \end{bmatrix} \end{matrix} \right.$$

$MQ \leq^L IT$ (IT suave)

- Invertir Matriz Triangular $n \times n$ en $O(t(n))$
- $t(n)$ suave

$$\begin{bmatrix} I & A & 0 \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & -A & AB \\ 0 & I & -B \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I & A & 0 \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A & AB \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$O(n^2 + t(3n))$$

$$O(t(n))$$

$IT \leq 4IT2$ (IT suave)

- $O(t(m)|m$ es una potencia de 2)
- $t(m)$ suave

$$B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t(m) = t(2(m/2)) \leq ct(m/2) \\ m/2 < n, t(m/2) \leq t(n) \\ t(m) \leq ct(n) \\ O(ct(n) + n^2) = O(t(n)) \end{array}$$

IT2 ≤ MQ

(MQ fuertemente cuadrático)

$$\begin{aligned}
 & A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}; A^{-1} = \begin{bmatrix} F & G \\ 0 & H \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F & G \\ 0 & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BF & BG + CH \\ 0 & DH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} BF = DH = I \\ F = B^{-1}; D = H^{-1} \\ BG + CH = 0 \\ G = -B^{-1}CH = -B^{-1}CD^{-1} \end{array} \right.$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}CD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \quad I(n) \leq 2I\left(\frac{n}{2}\right) + 2M\left(\frac{n}{2}\right) + g(n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(n) \leq an^2 \\ t(n) \geq bn^2 \\ M(n) \leq ct(n) \\ t(n) \geq 4t\left(\frac{n}{2}\right) \\ I(n) \leq 2I\left(\frac{n}{2}\right) + 2M\left(\frac{n}{2}\right) + g(n) \\ I(n) \leq 2I\left(\frac{n}{2}\right) + 2ct\left(\frac{n}{2}\right) + an^2 \\ I(n) \leq 2I\left(\frac{n}{2}\right) + 2c\left(\frac{1}{4}\right)t(n) + a\frac{t(n)}{b} \\ I(n) \leq 2I\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{b}\right)t(n) \\ I(n) \leq 2I\left(\frac{n}{2}\right) + dt(n) \end{array} \right.$$

Reducciones entre problemas de caminos mínimos

- f y g dos funciones que representan el costo de ir de un nodo a otro
- $f: X^*Y; g: Y^*Z$
- $h: X^*Z ; h(x,z) = \min(f(x,y) + g(y,z))$
- f^*g
- $f^*f = f^2$ cuando f y g coinciden
- $\min(f, f^2)$ Coste mínimo directo o pasando exactamente por un nodo
- Genéricamente $f^i \ i > 0$

Reducciones entre problemas de caminos mínimos

$$f^0 \begin{cases} 0 & \text{Si } x=y \\ \infty & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

$$f^*(x, y) = \min_{i \geq 0} f^i(x, y)$$

$$f^*(x, y) = \min_{0 \leq i \leq n} f^i(x, y)$$

- **MUL: f x g**
- **TRC: f***

$MUL \equiv^L TRC$ ambos suaves
MUL fuertemente cuadrático

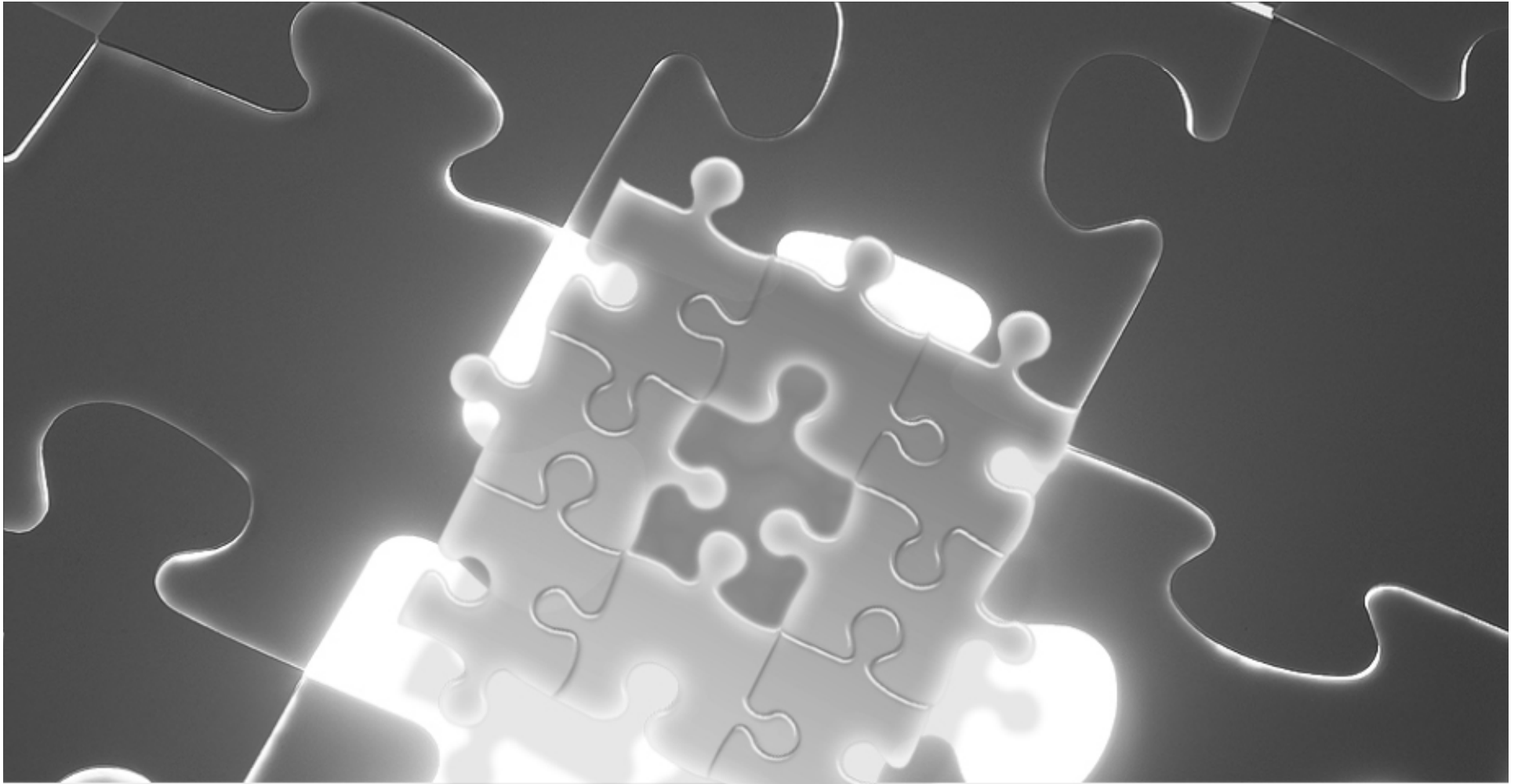
- Restringir a $\{0, \infty\}$, luego calcular con Warshall $\Theta(n^3)$
- $MULB \leq^L MUL$
- $TRCB \leq^L TRC$
- Dado que $MUL \equiv^L TRC \rightarrow MULB \equiv^L TRCB$

MULB \leq^L MQ

$\{1,2,\dots,n\}$

$$A_{ij} \begin{cases} 0 & \text{si } f(i,j)=\infty \\ 1 & \text{si } f(i,j)=0 \end{cases} \quad B_{ij} \begin{cases} 0 & \text{si } g(i,j)=\infty \\ 1 & \text{si } g(i,j)=0 \end{cases}$$

$$(fxg)_{ij} \begin{cases} \infty & \text{si } AB_{ij}=0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



***"640K deben de ser suficientes
para cualquiera"***

— 1981, Bill Gates hablando acerca de la RAM de las computadoras.—