División de Polígonos

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Diseño y Análisis de Algoritmos

Cátedra de Programación

Carrera de Ingeniería de Sistemas

Prof. Isabel Besembel Carrera

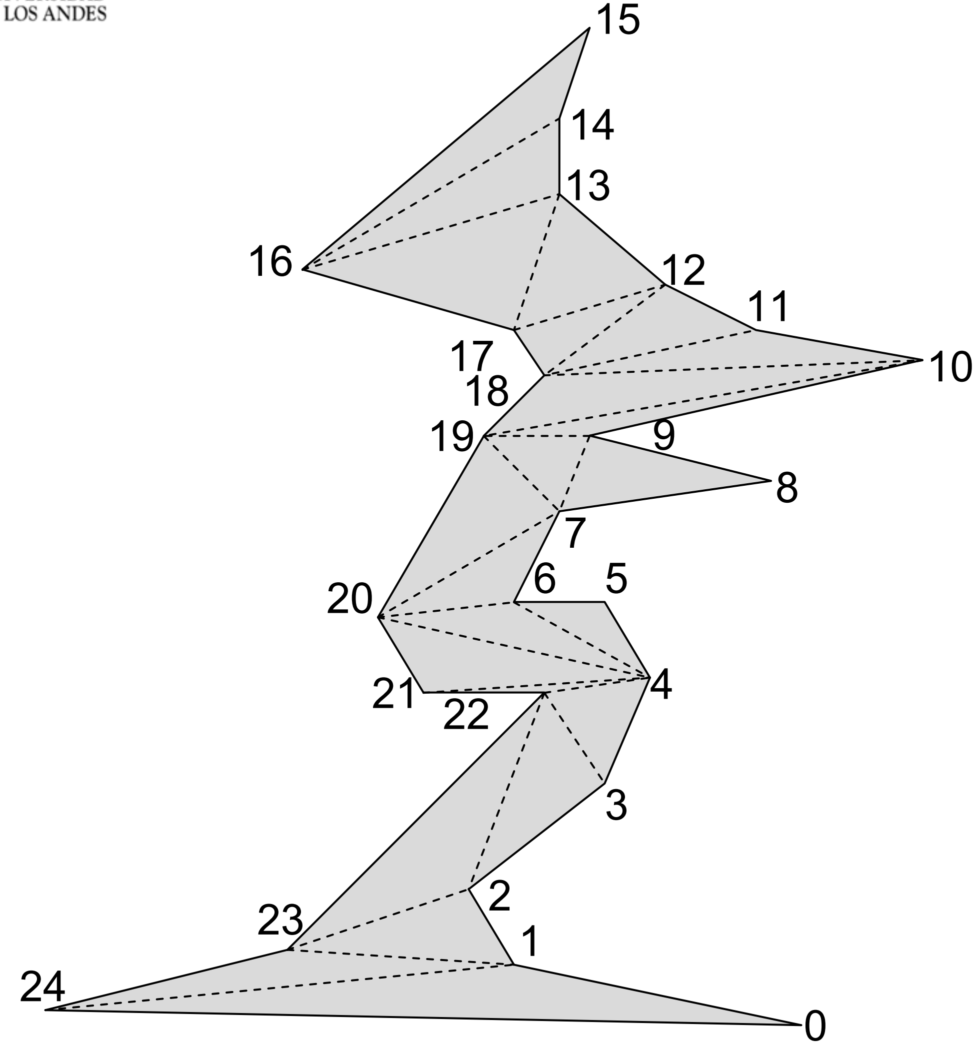
Todo el contenido está tomado de J. O'Rourke "Computational Geometry in C"

División monótona

(Lee y Preparata, 1977)

- Una cadena poligonal C es estrictamente monótona con respecto de L' si cada línea L ortogonal a L' toca C en a lo sumo un punto=> $L \cap C$ es vacío o un punto
- Una cadena es monótona si $L \cap C$ tiene a lo sumo un componente conectado: es vacío o un punto o un segmento
- Un polígono P es monótono con respecto de L si ∂P puede ser dividido en dos cadenas poligonales A y B tal que cada cadena es monótona con respecto de L
- A y B comparten su vértice final

Ejemplo de polígono monótono



Polígono monótono respecto de la vertical
Dos cadenas monótonas
A=(v0,…, v15)
B=(v15,…v24, v0)
Ni A ni B son estrictamente monótonas, ya que v5v6 y v21v22 son horizontales

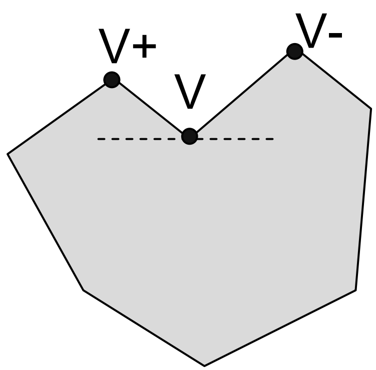
Algunos polígonos son monótonos respecto de varias líneas y algunos polígonos no son monótonos respecto de ninguna línea

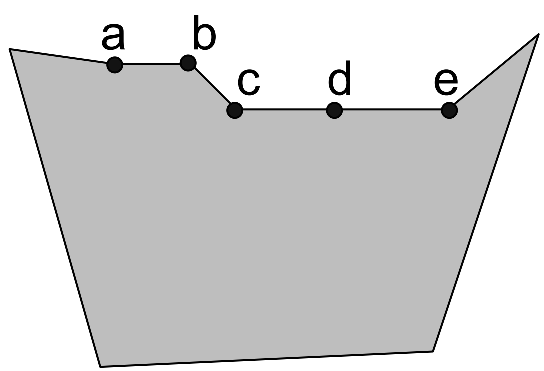
Propiedades de un polígono monótono

- Los vértices de cada cadena de un polígono monótono están ordenadas respecto de la línea de monotonía
- Se fija la línea de monotonía: eje vertical Y
- Los vértices se pueden ordenar por la coordenada Y en tiempo lineal: se busca el vértice más alto y el más bajo y se divide el borde de P en dos cadenas
- Los vértices en cada cadena están ordenados por Y
- Las dos listas ordenadas se mezclan en tiempo lineal, para producir la lista ordenada por Y

Cúspide interior de un polígono

- Lema cúspide: si un polígono no tiene cúspides interiores entonces es monótono
- Una cúspide interior de P es un vértice reflejo (concavo) V cuyos vértices adyacentes V- y V+ están arriba o con V o abajo o con V





V+ y V- están ambos arriba de V

Cúspides interiores a, c y e
No son cúspides interiores b ni d

Triangulación de Polígonos Monótonos

- Cualquier polígono monótono cuya dirección de monotonía está dada, puede ser tringularizado en O(n)

1. Ordenar los vértices
2. Usar un algoritmo voraz que corte los triángulos desde arriba. Para cada vértice V, conectarlo con todos los vértices arriba de él que sean visibles con una diagonal y luego eliminar la porción de arriba de P que ya fue triangularizada
3. Hasta que no hayan vértices abajo

Ejemplo: (v14, v13) en la 1era iteración

Garey et al, 1978;
O'Rourke, 1994;
Berg et al, 1997

División Trapezoidal

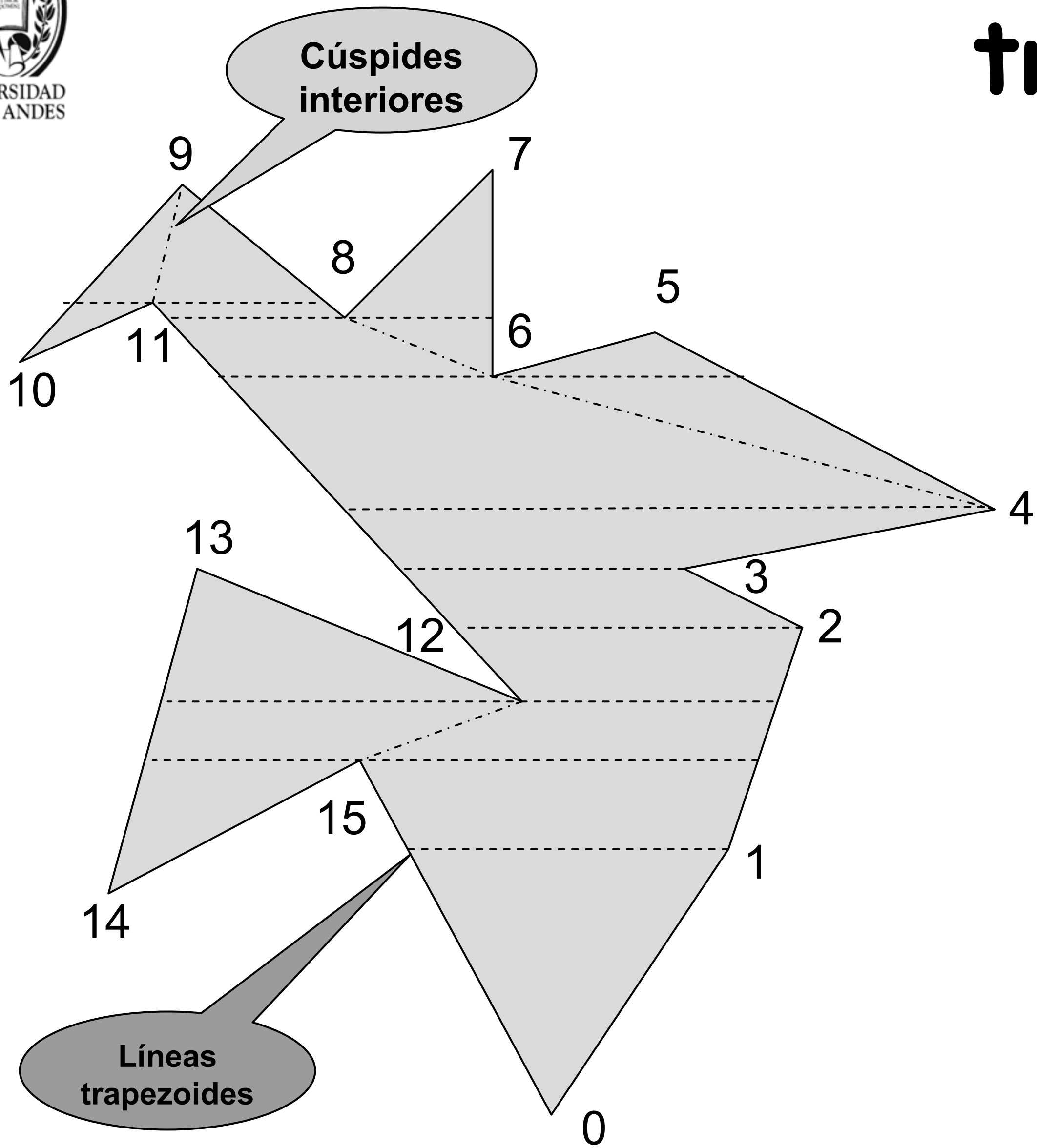
(Chazelle y Incerpi,1984; Fournier y Montuno, 1984)

- No se usan diagonales
- Una división trapezoidal horizontal de P se obtiene dibujando una línea horizontal desde cada vértice de P, un segmento horizontal S tal que $S \subset P$ y $S \cap \partial P = V$
- S está enteramente de un lado o de otro de V
- No hay 2 vértices en la misma línea horizontal
- Vértice de soporte: aquel sobre una línea horizontal

División Trapeziodal

- Sea P un polígono con 1 vértice de soporte por línea horizontal, cada trapezoide tiene exactamente 2 vértices de soporte, 1 sobre la línea superior y 1 sobre la inferior
- Si un vértice de soporte está en el interior de un trapezoide, entonces es una cúspide interior
- Una cúspide interior puede ser hacia-arriba o hacia-abajo
- La división trapezoidal hace una división monótona

Ejemplo de división trapezoidal

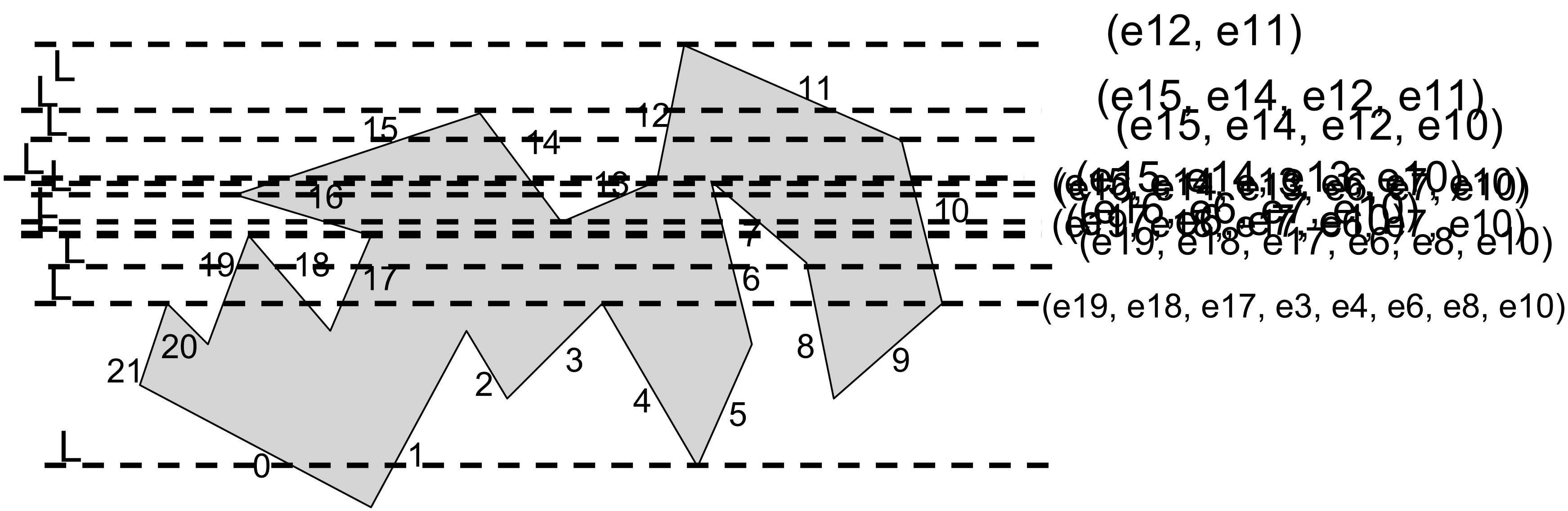


Cúspide hacia-abajo v6 se resuelve con una diagonal v6v4
Cúspide hacia-arriba v15 se resuelve conectándola con v12

Plano o Línea de barrido

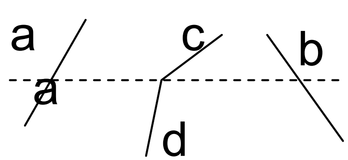
(Nievergelt y Preparata, 1982)

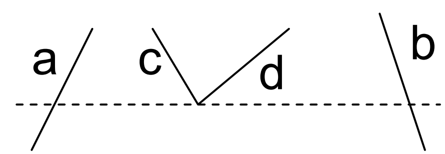
- Técnica para realizar la división trapezoidal
- Se barre con una línea horizontal L sobre el polígono P, parándose en cada vértice, teniendo los vértices ordenados por la coordenada Y. O(n lg n).

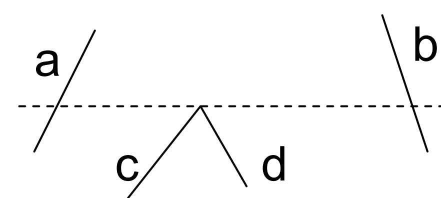


Eventos de barrido

- Sea V entre los segmentos a y b sobre L y compartido con los segmentos c y d
  1. c está arriba de L y d está abajo: elimine c de la lista e inserte d (…, a, c, b, ….) => (…, a, d, b, …)
  2. c y d están arriba de L: elimine c y d de la lista (…, a, c, d, b, …)=>(…, a, b, …)
  3. c y d están por debajo de L: inserte c y d en la lista (…, a, b, …)=>(…, a, c, d, b, …)







División monótona

1. Ordenar los vértices por su coordenada Y
2. Desarrollar el plano de barrido para dividir en trapezoides
3. Dividir en polígonos monótonos mediante la conexión con las cúspides internas
4. Triangular cada polígono monótono en tiempo lineal

O(n log n) **Ejercicio: implementarlo**

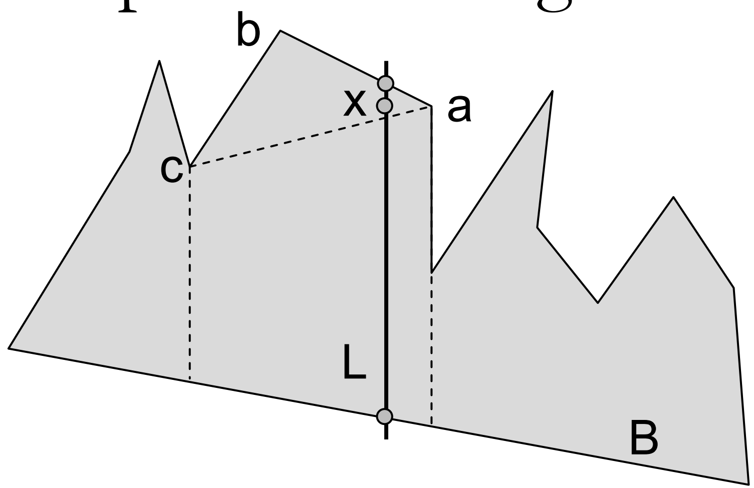
La implementación más eficiente para la lista es utilizar un árbol_B, un árbol 2-3 o un árbol rojinegro

Ejercicios

1. ¿Puede un polígono ser monótono respecto de una dirección precisa?
2. Construya un polígono monótono pero no estrictamente monótono que no tenga cúspides interiores
3. Extienda el algoritmo de división trapezoidal para polígonos con varios vértices en la línea horizontal
4. Proponga un algoritmo para hacer la triangulación de un polígono con huecos según el plano de barrido. Exprese la complejidad del algoritmo en función del número total de vértices del polígono

División en Montañas Monótonas

- Una montaña monótona es un polígono monótono con 1 de sus dos cadenas monótonas como un segmento (base)
- Si la dirección de monotonía es horizontal, entonces el polígono parece un rango de montañas



Base B
Punta de oreja b

Lema Montaña Monótona

- Lema montaña monótona: Cada vértice estrictamente convexo de una montaña monótona M, con la posible excepción de los vértices bordes de la base, es una punta de oreja
- Este lema no se cumple para polígonos monótonos
- Para que el algoritmo de triangulación sea O(n) hay que:
  - Identificar la base en O(n)
  - Encontrar el próximo vértice convexo sea O(1)

Algoritmo de triangulación de montañas monótonas

1. Identificar la base
2. Iniciar los ángulos internos de cada vértice no base
3. Formar una lista con los vértices estrictamente convexos no base
4. Mientras la lista no esté vacía

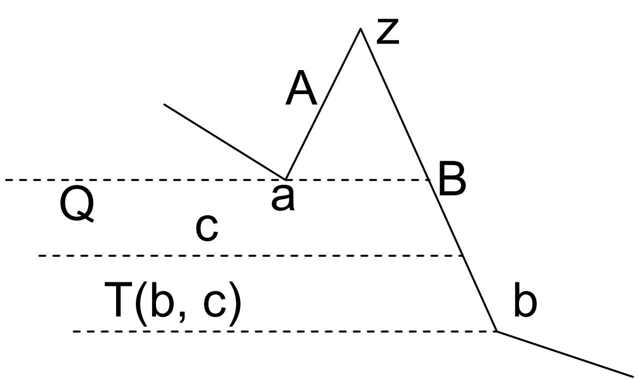
   Para cada vértice convexo b, elimine Δabc

   Despliegue la diagonal ac

   Actualice los ángulos y la lista

Lema división montañas monótonas

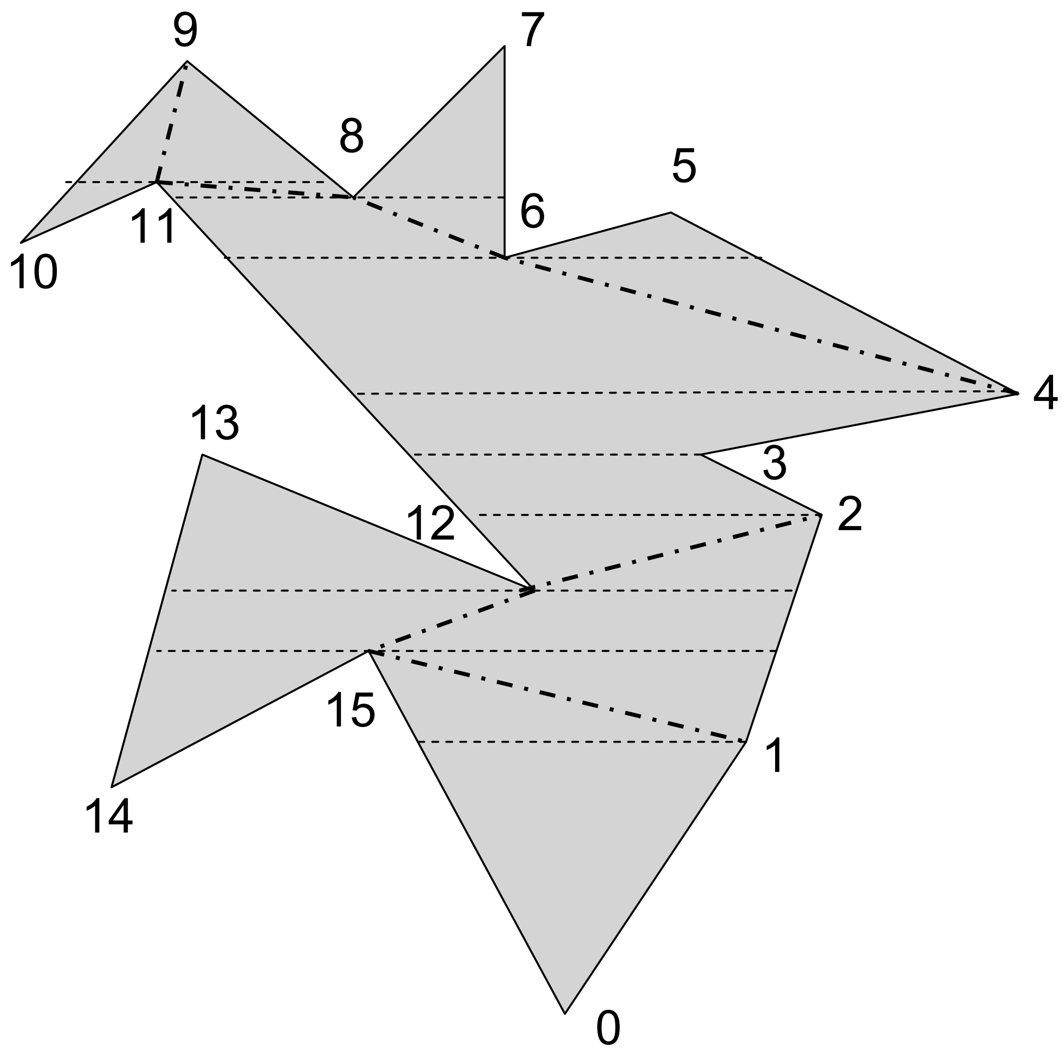
- Lema división montañas monótonas: en una división trapezoidal de un polígono P, la conexión de cada par de vértices de soporte del trapezoide que no esté sobre el mismo lado (izquierdo o derecho) de sus trapezoides divide P en montañas monótonas



Prueba:

- lema cúspide garantiza que las piezas de la división son monótonas
- por contradicción; suponga que las cadenas A y B de Q tienen al menos 2 segmentos. zb, b no puede ser el vértice final. T(b,c) c no puede estar en zb, c debe estar debajo de a, c no puede estar del mismo lado de b en T(b,c)=> contradicción

Ejemplo de división en montañas monótonas



B=v11v12
T(i,j) es el trapezoide cuyos vértices de soporte son vi y vj, arriba y abajo respectivamente
T(12, 2) según B debe ser cortado por una diagonal v12v2 para asegurar que v12 sea convexo
T(2, 3) y T(3, 4) son incluidos directamente
T(4, 6) debe ser cortado por la diagonal v4v6 para separar la monotonía en v6

Triangulación en O(n)

- Triangulación aleatorizada de Seidel: algoritmo las vegas (decisión sobre qué segmento escoger según el lanzamiento de una moneda), división trapezoidal -> montañas monótonas -> camino de triangulación en fases, para un O(n log* n)

año	complejidad	referencia
1911	O(n2)	Lennes, 1991
1978	O(n log n)	Garey et al.,1978
1983	O(n log r) r reflejo o concavo	Hertel y Mehlhorn, 1983
1984	O(n log s) s sinuosidad	Chazelle e Incerpi
1988	O(n + nt0) t0 int. Triáng.	Toussaint, 1990
1986	O(n log log n)	Tarjan y Van Wyk
1989	O(n log* n) aleatorizado	Clarkson et al.
1990	O(n log* n) limitado int	Kirkpatrick et al.
1990	O(n)	Chazelle, 1991
1991	O(n log* n) aleatorizado	Seidel, 1991

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Ejercicios

1. Pruebe que cada árbol binario realizado de una triangulación dual es una montaña monótona
2. Proponga un programa para generar aleatoriamente montañas monótonas
3. Implemente el algoritmo para la triangulación de montañas monótonas

Fin de curso!!!