

**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
POSGRADO INGENIERÍA BIOMÉDICA
FEBRERO 2007**

TRANSFORMADA WAVELET

LUIS ENRIQUE MENDOZA

Contenido

Motivación:

FT (Fourier transform), STFT (Short time Fourier Transform).

TW (Transformada wavelet), análisis multiresolucional.

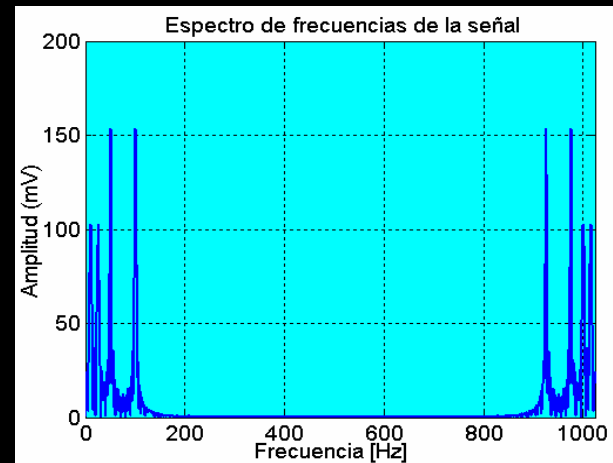
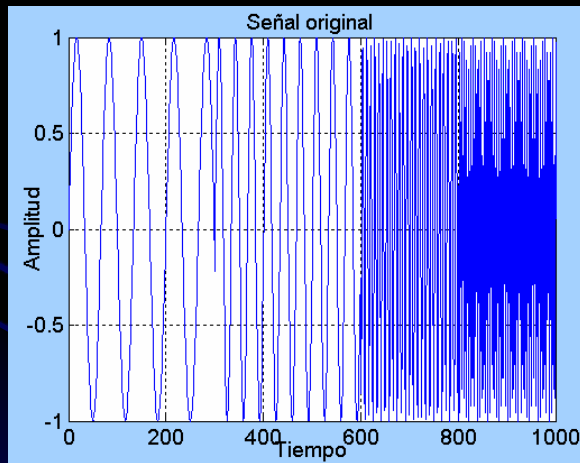
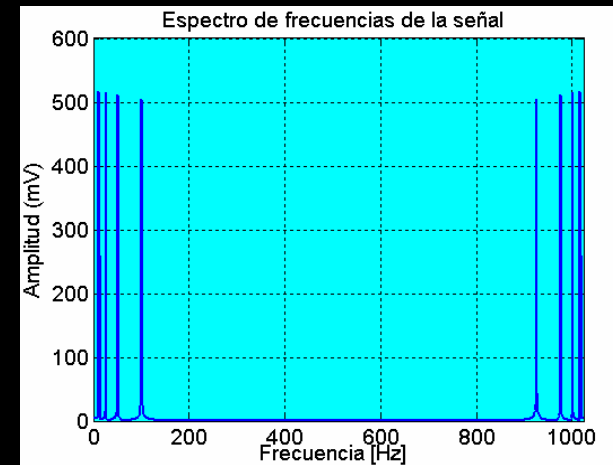
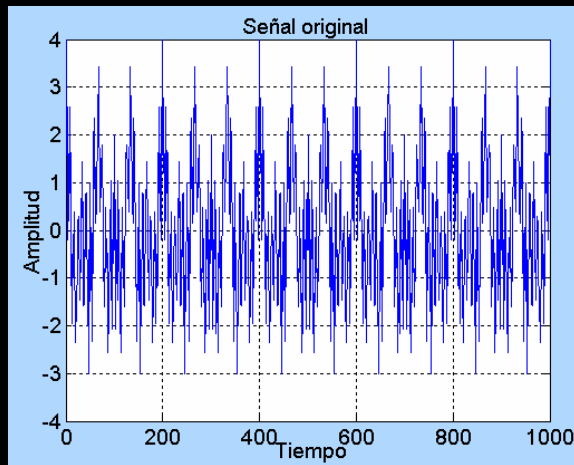
Bases ortogonales y ortonormales, Wavelet madres.

Clasificación de la transformada wavelet.

Wavelet multi-banda.

Wavelet en imagenes.

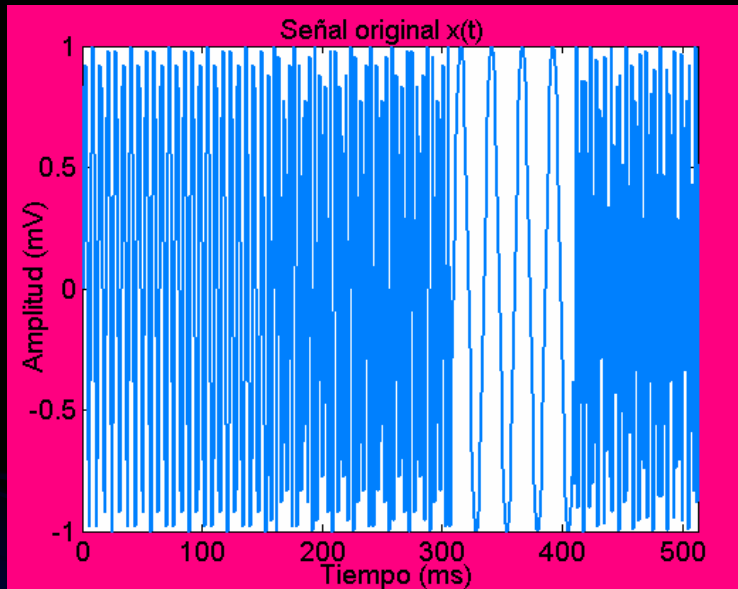
Transformada de fourier



Máxima resolución de frecuencia, no única.

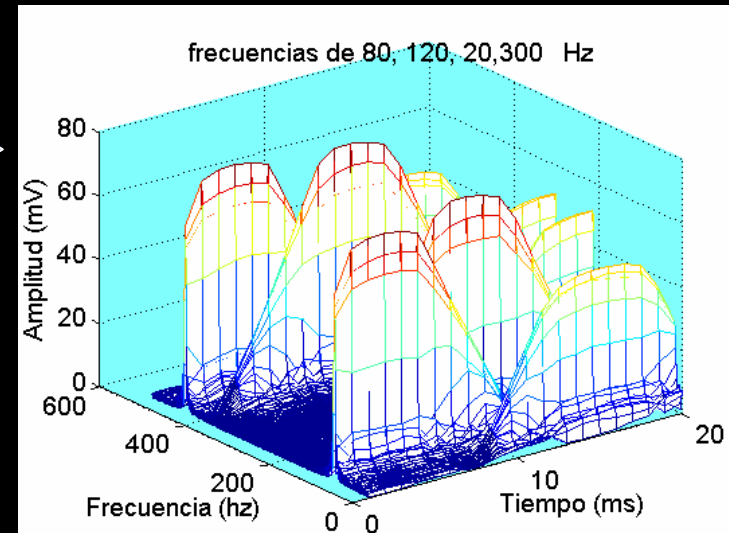
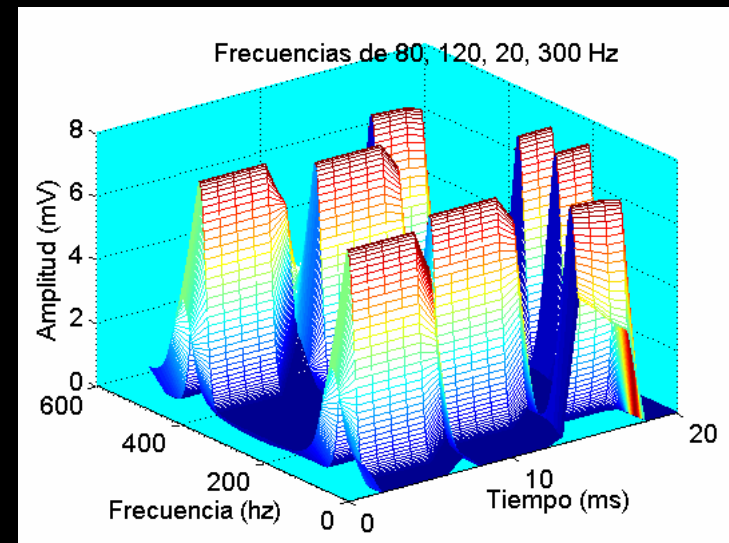
La señal $X(t)$, es representada como la suma de señales sinusoidales.

Short-time Fourier transform



Longitud de la ventana: baja

Longitud de la ventana: alta



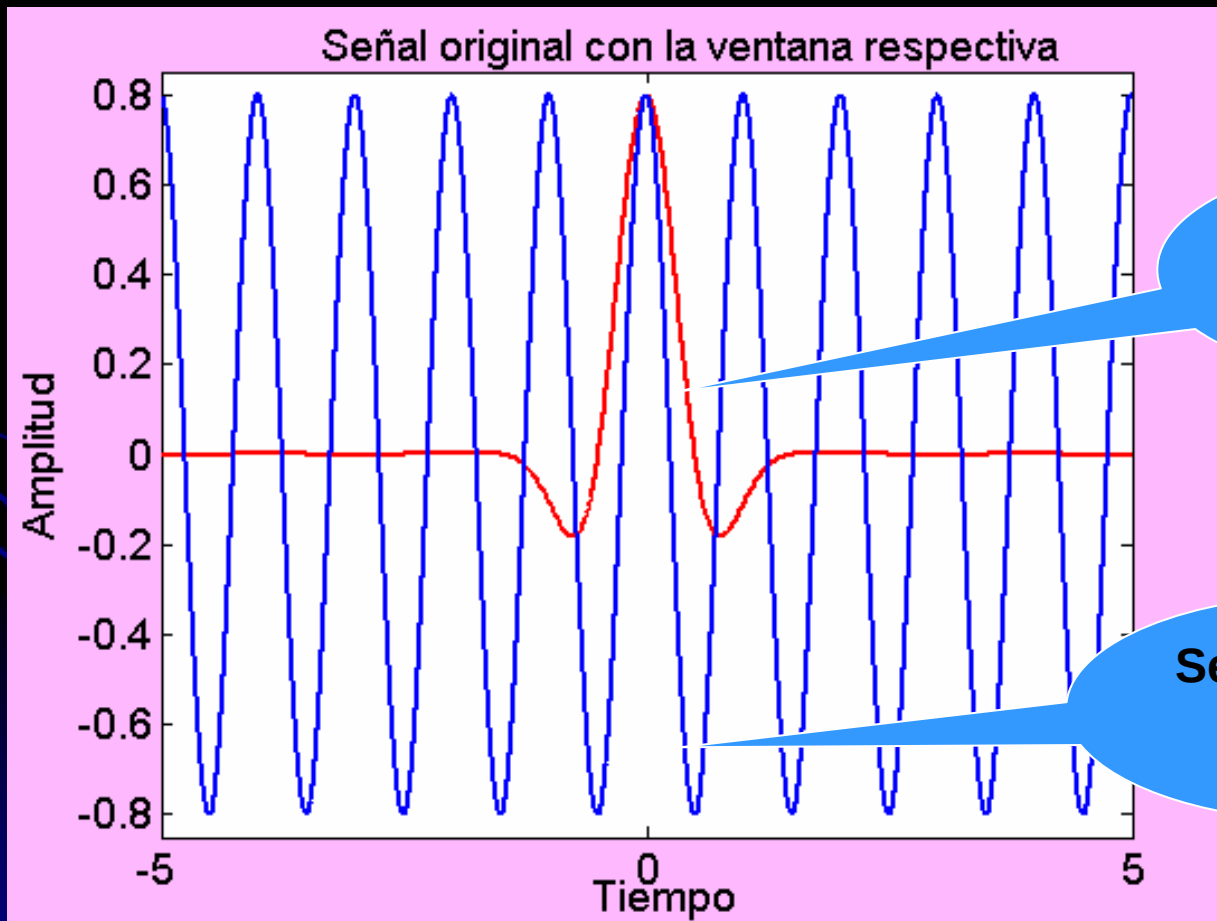
Resolución de tiempo-frecuencia.

Resolución de la ventana única.

Como definir tamaño de la ventana ?

Que es una WAVELET ?

Una función matemática que separa la información en diferentes componentes de frecuencia, se le conocen como; **Wavelet madre**.



Señal energía finita.

Señal energía infinita

Transformada wavelet

Función wavelet: 'small wave', que tiene su energía concentrada en el tiempo.

$$f(t) = \sum_k a_k \psi_k(t)$$

$\psi(t)$

Función de valores reales, energía concentrada, oscilatoria

a_k

Coeficientes de expansión

$$\langle \psi_k(t), \psi_j(t) \rangle = 0 = \int \psi_k(t) * \psi_j(t) dt$$

$$f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

j, k

Enteros

$\psi_{j,k}(t)$

Función Wavelet

Bases ortogonales y ortonormales

Ortogonalidad.

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(t) * \psi_j(t) dt = 0$$

Producto interno debe ser cero.

Ortonormalidad.

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(t) * \psi_j(t) dt = 0$$

Producto interno debe ser cero.

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_k(t)|^2 dt = 1$$

Su magnitud es unitaria.

Transformada wavelet

La expansión Wavelet da localización tiempo-frecuencia de la señal.

Es una serie de bloques interconectados para representar una señal o función.

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k)$$

j, k

Enteros

Se dice que la transformada wavelet satisface la condición de análisis **multiresolucional**.

$$\varphi(t - k)$$

Combinación lineal

$$\varphi(2t - k)$$

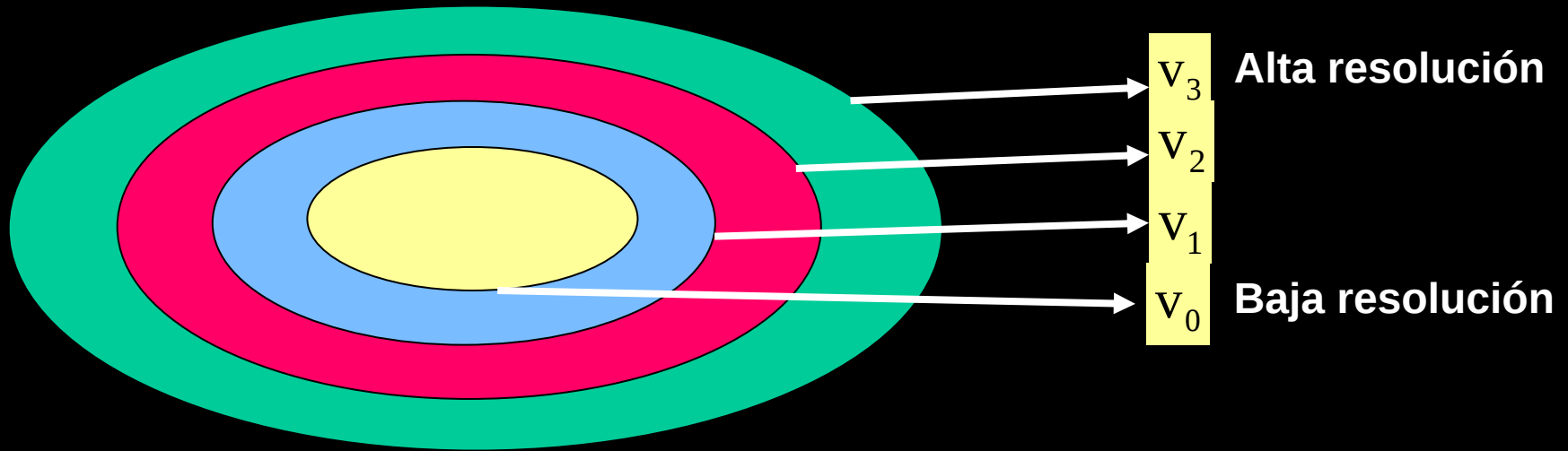
+

?

$$f(t) = \sum_k a_k \varphi(2^j t - k)$$

$J < 0$ y $J > 0$

Análisis multiresolucional



$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$$

$$\varphi(t) = \sum_n h(n) * \sqrt{2} * \varphi(2t - n)$$

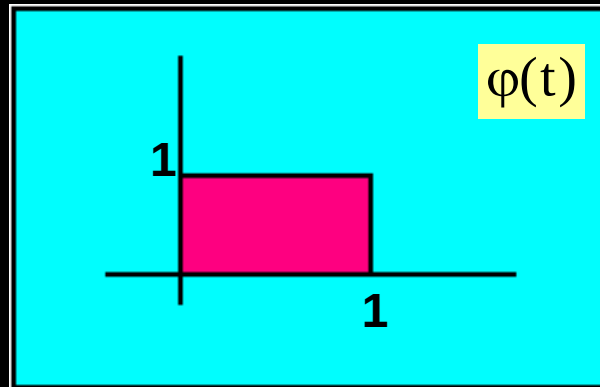
$h(n)$ coeficientes de la función escala

1.4142 Factor de norma

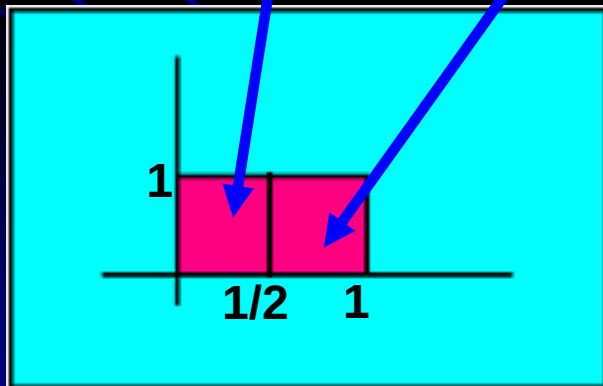
n Entero

Análisis multiresolucional

Ejemplo: Se tiene la función **Haar** que es un simple escalón unitario (Duración = 1 y Amplitud = 1), expresado por:



$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1)$$



$$\varphi(t) = \sum_n h(n) * \sqrt{2} * \varphi(2t - n)$$

$$h(0) = h(1) = 1/\sqrt{2}$$

$$\langle \varphi(2t) * \varphi(2t - 1) \rangle = 0$$

Análisis multiresolucional

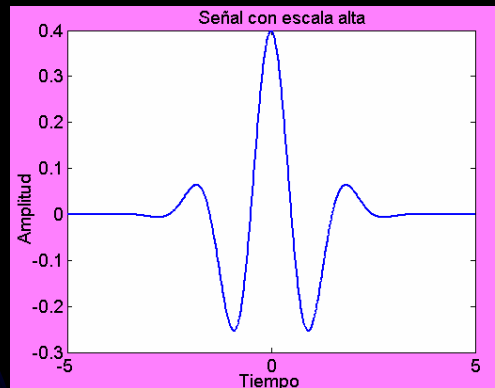
Escalas bajas = destalles pequeños = frecuencias altas

Resolución en tiempo alta y resolución en frecuencia baja para altas frecuencias.

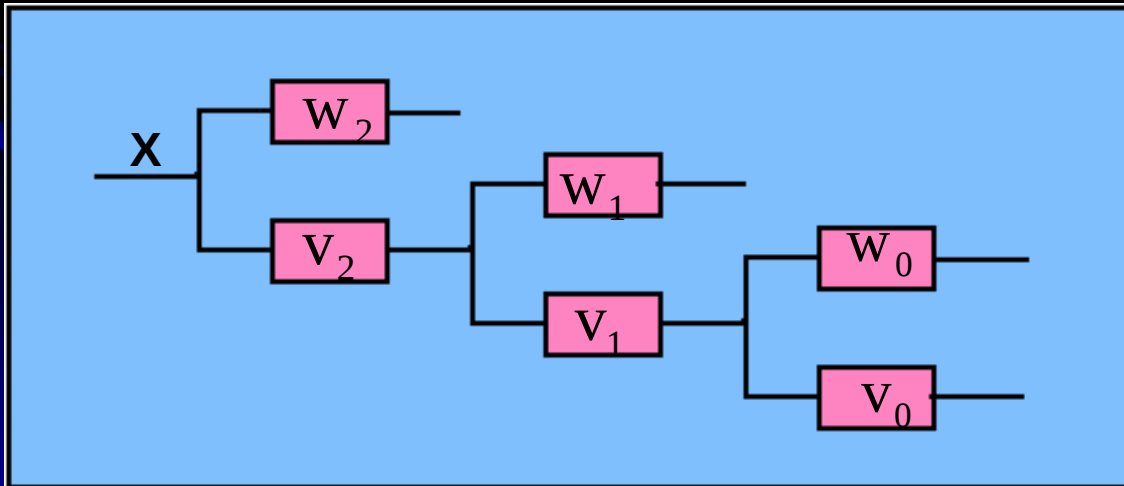
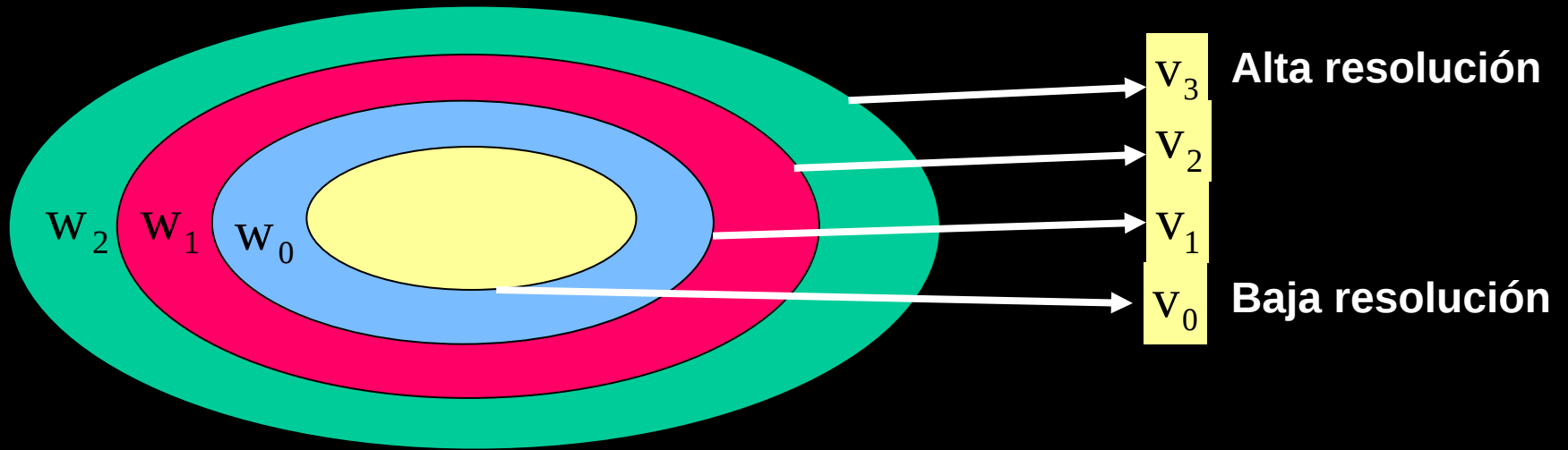


Escalas altas = destalles grandes = frecuencias bajas

Resolución en tiempo baja y resolución en frecuencia alta para bajas frecuencias



Análisis multiresolucional



$$V_2 = W_1 + V_1$$

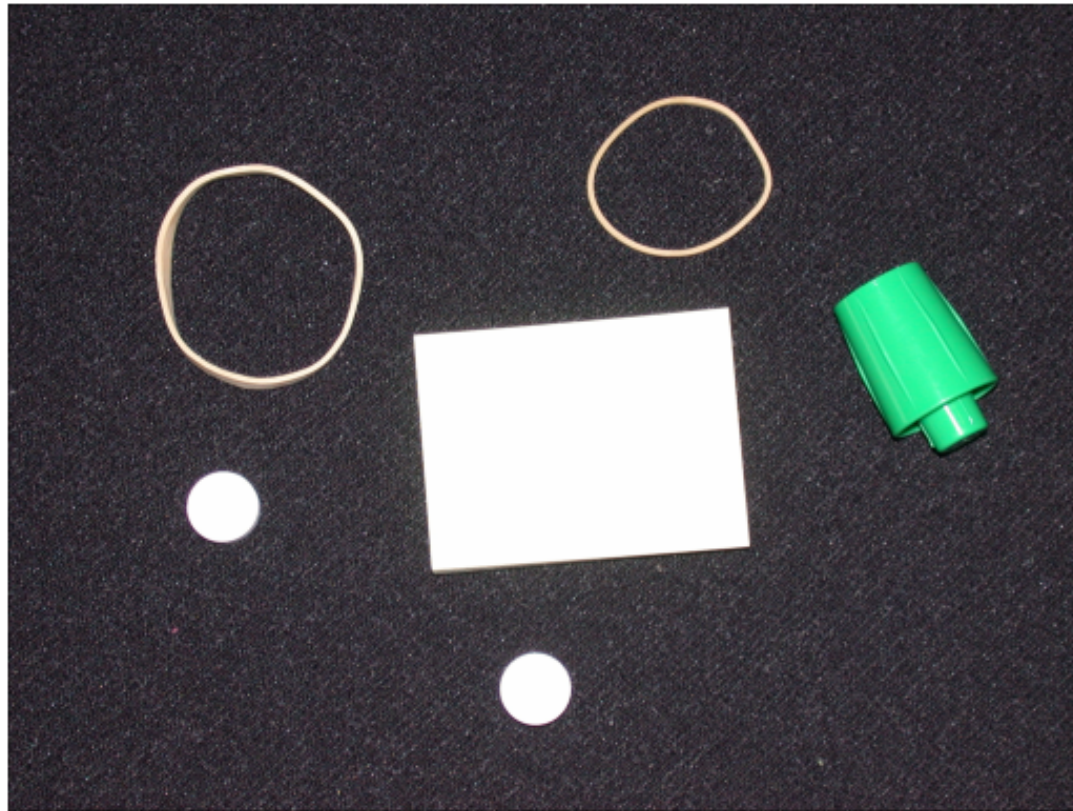
$$V_1 = W_0 + V_0$$

Análisis en bloques

Análisis multiresolucional

ejemplo

Imagen real



Análisis multiresolucional

ejemplo

Imagen sin detalles



Aumento de resolución

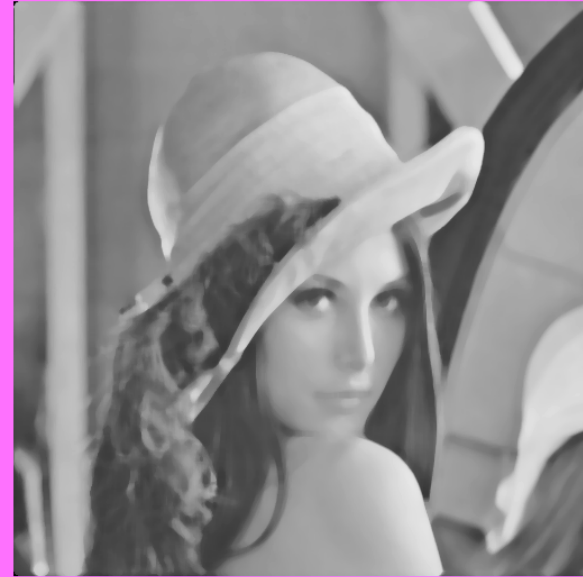


Imagen con mas detalles

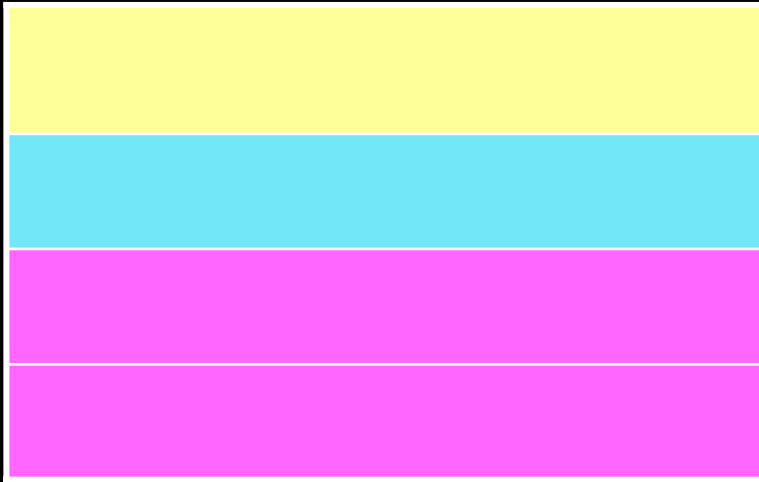


Imagen máxima resolución

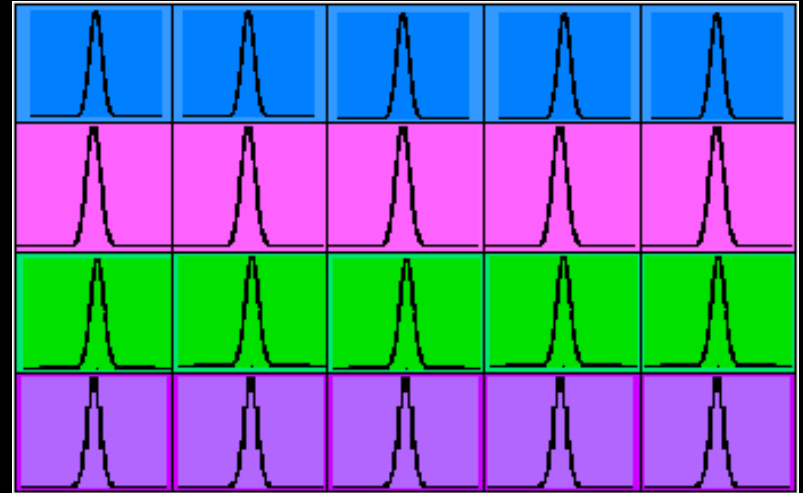


Análisis multiresolucional

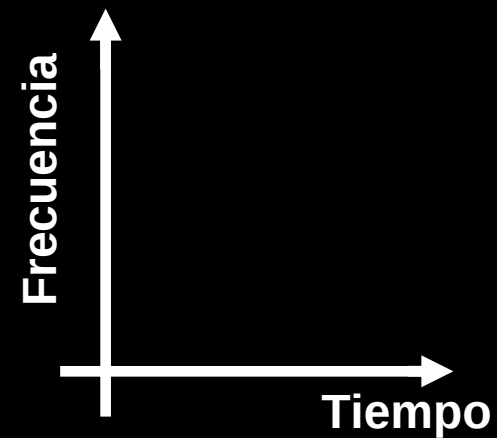
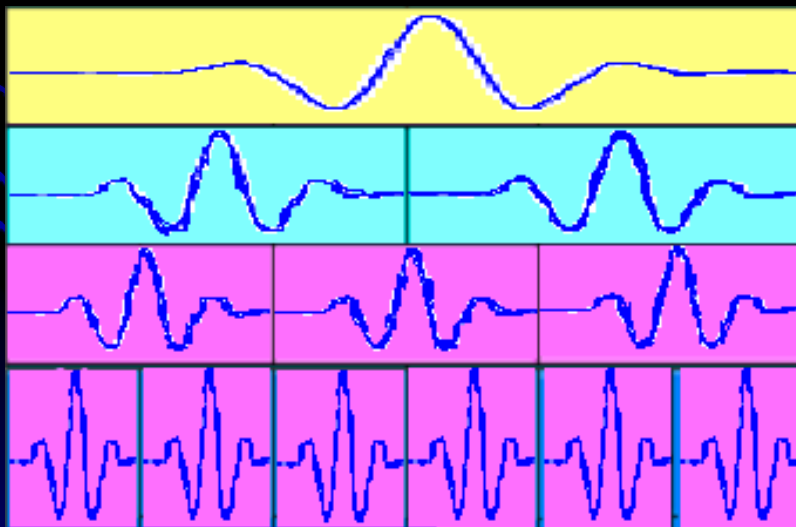
FT



STFT



WT



Luis E. Mendoza

Funciones Wavelets

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = 0$$

$$\psi(t) = \sum_n h_1(n) * \sqrt{2} * \varphi(2t - n)$$

$$\varphi(t) = \sum_n h(n) * \sqrt{2} * \varphi(2t - n)$$

Relación

$$h_1(n) = (-1)^n * h(1 - n)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \varphi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(j, k) \psi_{j,k}(t)$$



$$V_0$$



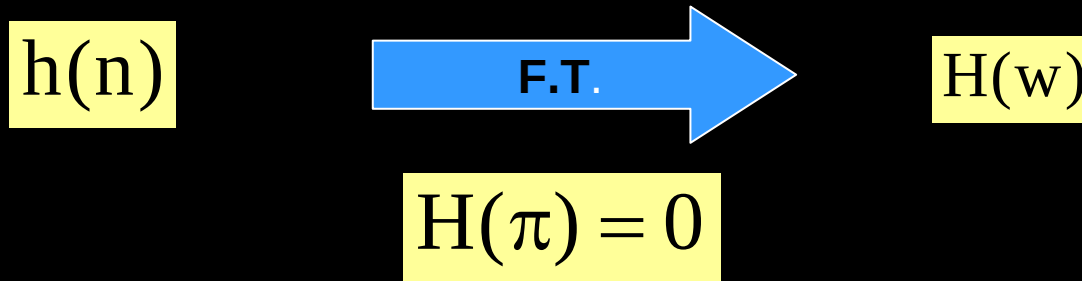
$$\sum_r w_r$$

$$c(k) = \langle f(t) * \varphi_k(t) \rangle$$

$$d(j, k) = \langle f(t) * \psi_{j,k}(t) \rangle$$

Propiedades de la transformada wavelet

- Ortogonalidad
- Wavelet : como una combinación lineal de $\varphi(t)$ y $\psi(t)$
- Diseño de momentos cero en la wavelet.

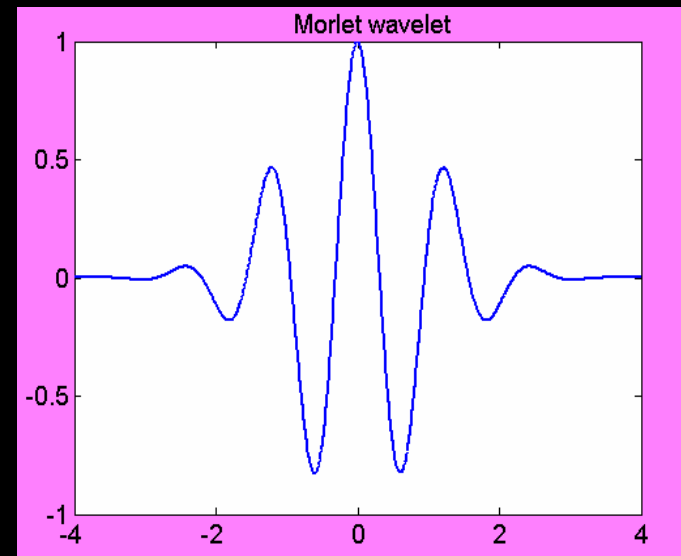
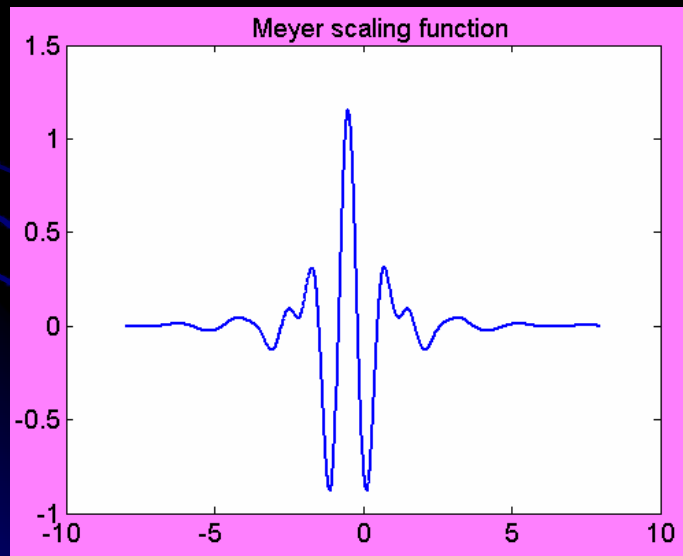
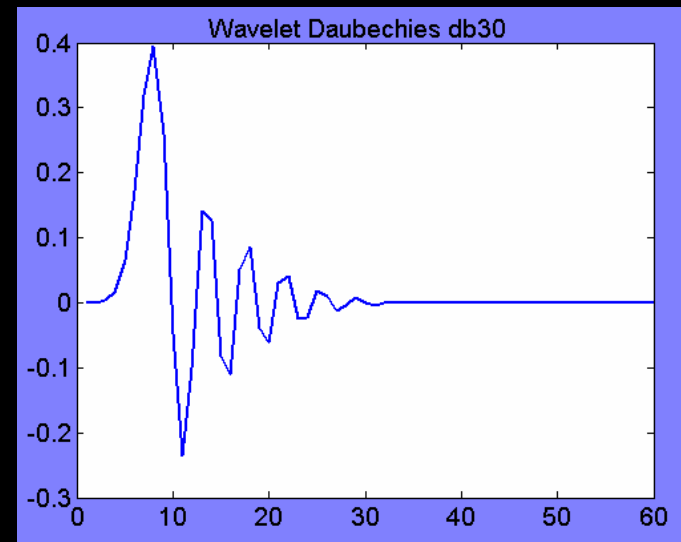
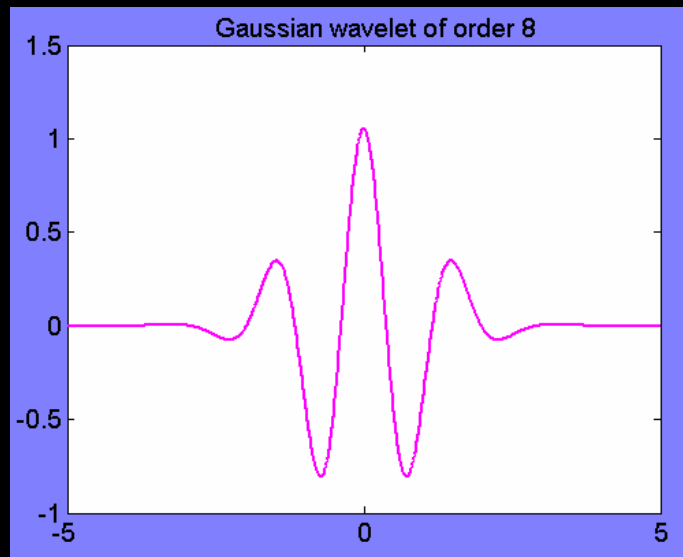


Se dice que $h(n)$, satisface las condiciones para que $\varphi(t)$ sea ortogonal.

- Energía:

$$\int |f(t)|^2 dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d(j, k)|^2$$

Wavelet madres



Funciones wavelet

Luis E. Mendoza

Wavelet madres

Wavelet Gaussiana compleja.

Wavelet Daubechies.

Wavelet Coiflet.

Wavelet Mexican hat.

Wavelet Shannon compleja.

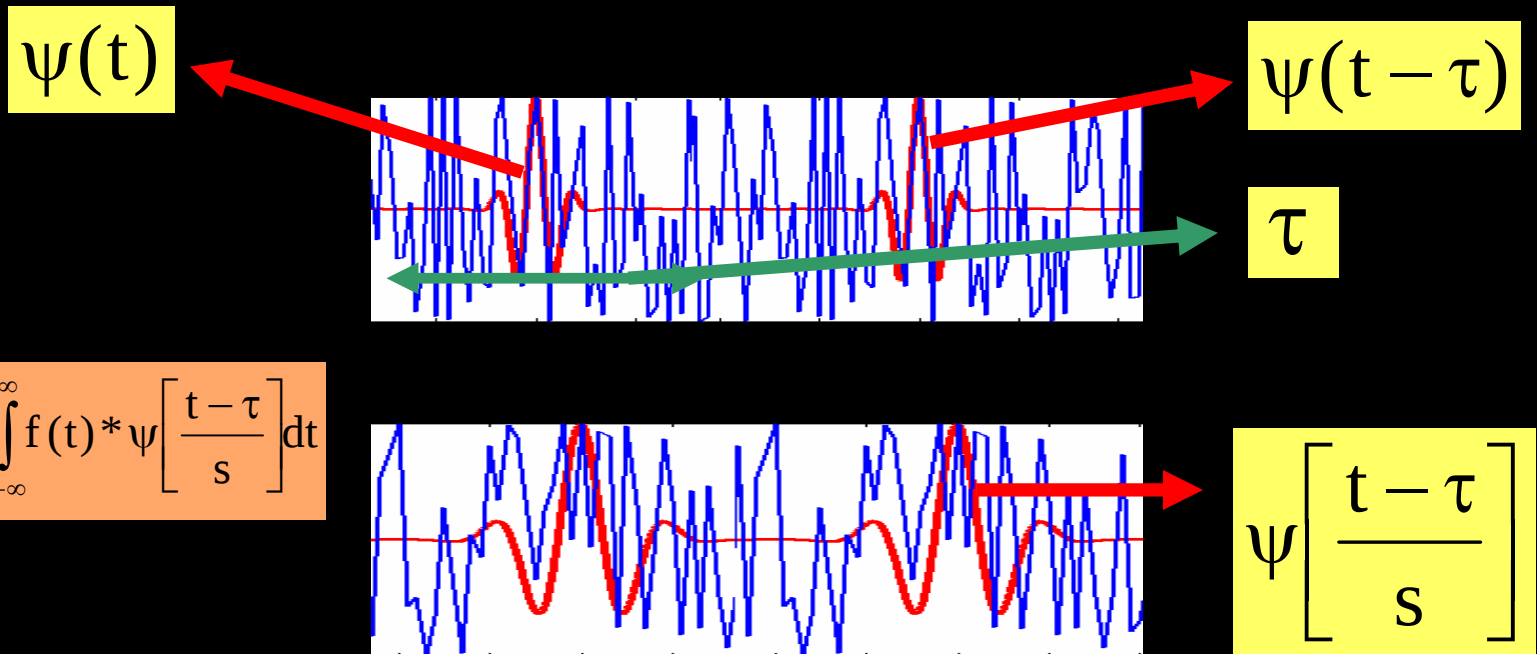
Wavelet symlet.

Clasificación de la transformada WAVELET

- Transformada wavelet continua.

- Transformada wavelet discreta.

Transformada Wavelet continua:



$$c(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * \psi\left[\frac{t - \tau}{s}\right] dt$$

τ Traslación y s Escala $\frac{1}{\sqrt{|s|}}$ Garantiza unicidad en la transformada.

Traslación: Localización en tiempo de la Wavelet madre.

Escala: Reemplaza el termino de frecuencia $s=1/f$. f = frecuencia

Transformada Wavelet inversa continua:

$$f(t) = \frac{1}{k_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau, s) * \frac{\psi(\tau, s)}{\tau^2} d\tau ds$$

Sumatoria de los coeficientes de la señal $f(t)$ sobre la wavelet.

$$k_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(f)|^2}{f} df < \infty$$



τ

Traslación

S

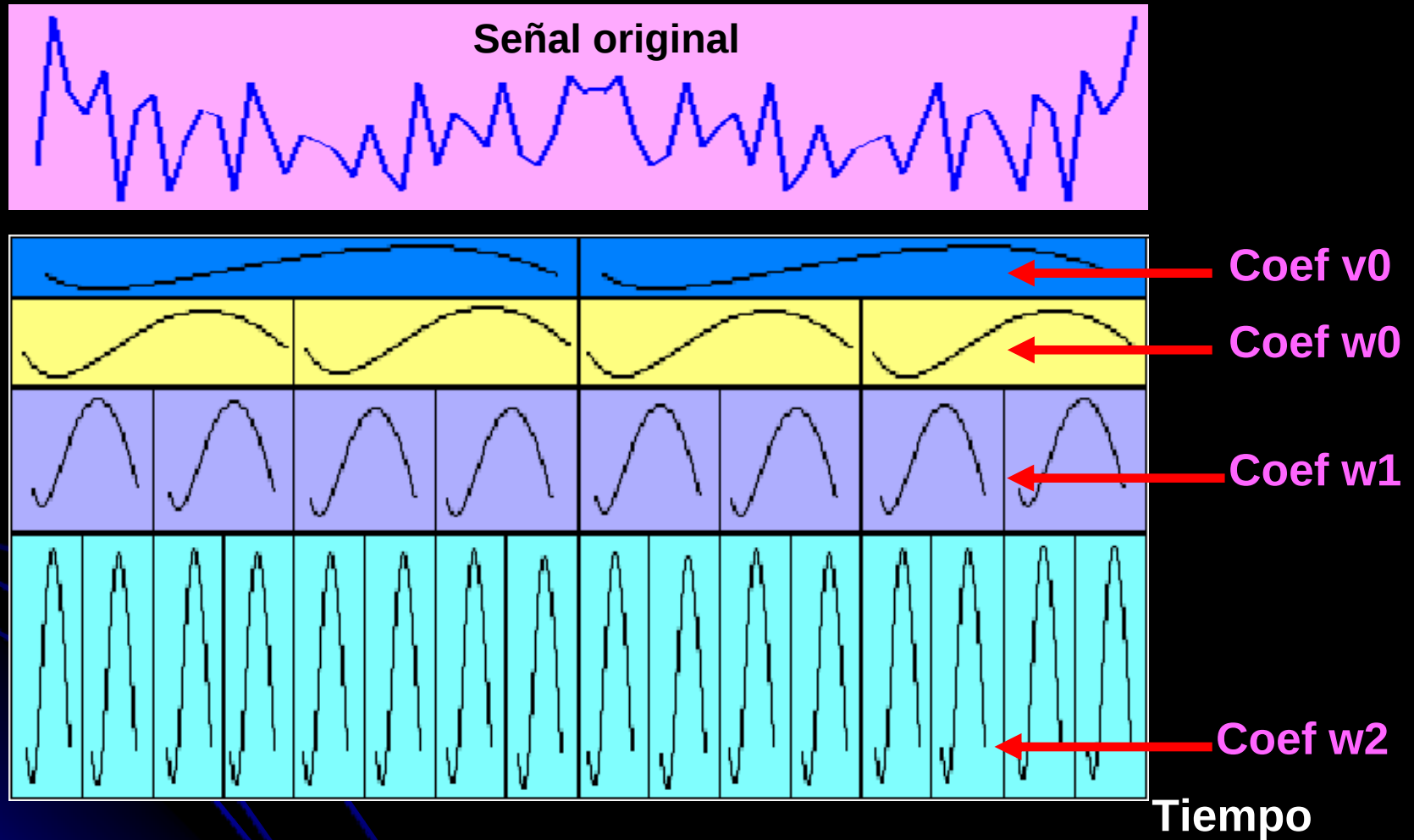
Escala

k_{ψ}

Admisibilidad

Transformada Wavelet continua:

Ejemplo



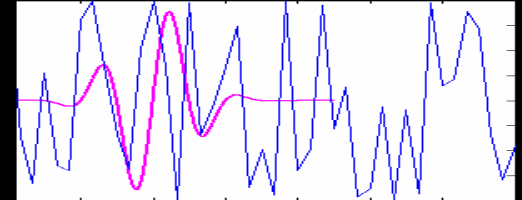
$c1(k, j)$ = coef v0, w0, w1, w2

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \phi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(j, k) \psi_{j,k}(t)$$

Pasos: Transformada Wavelet continua:

1. Elección de la Wavelet madre y colocación al inicio de la señal.

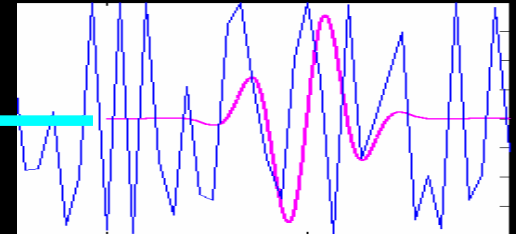
$$\psi(t)$$



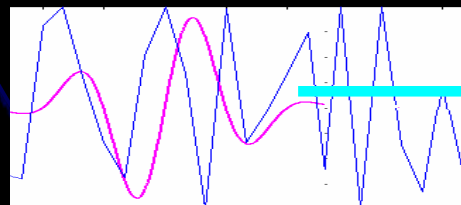
2. Dados los valores de escala y traslación se calculan los coeficientes wavelet (correlación).

3. Desplazamiento en el tiempo de wavelet madre y se repite paso 2.

$$\psi(t - k)$$



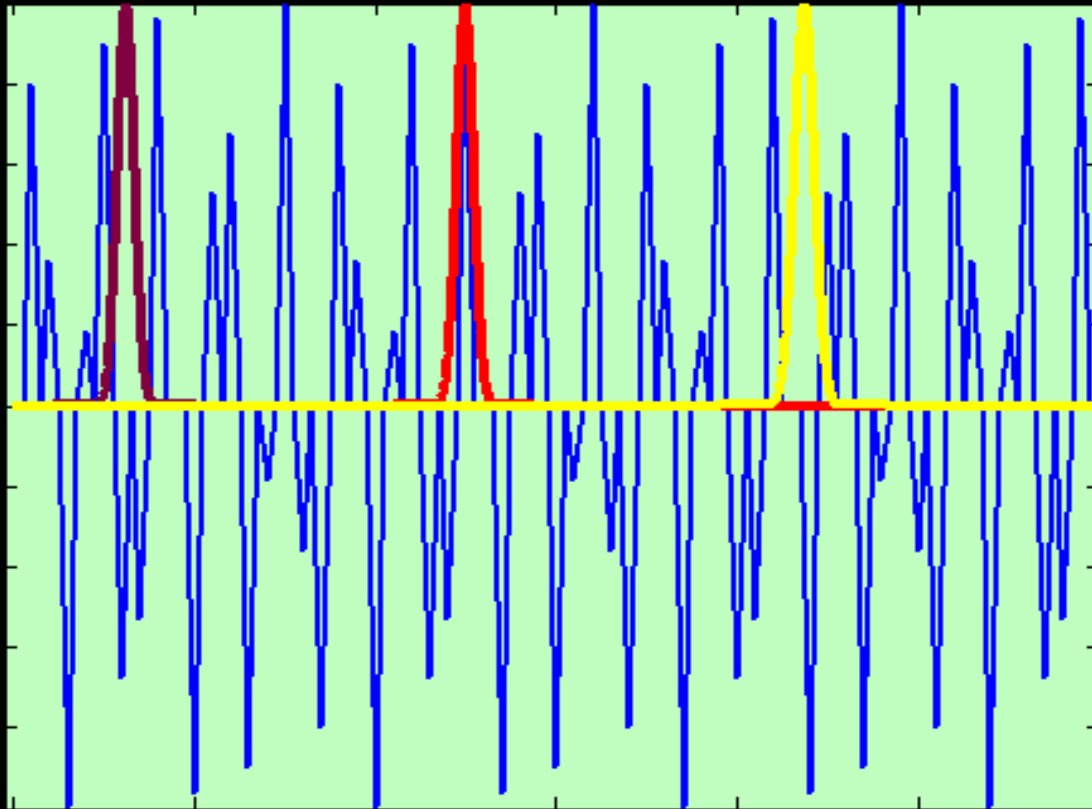
4. Escalamos en tiempo y se repite los pasos 2 y 3.



$$\psi \left[\frac{\tau}{s} \right]$$

Transformada wavelet continua

Ejemplos gráfico de calculo de la transformada Wavelets.

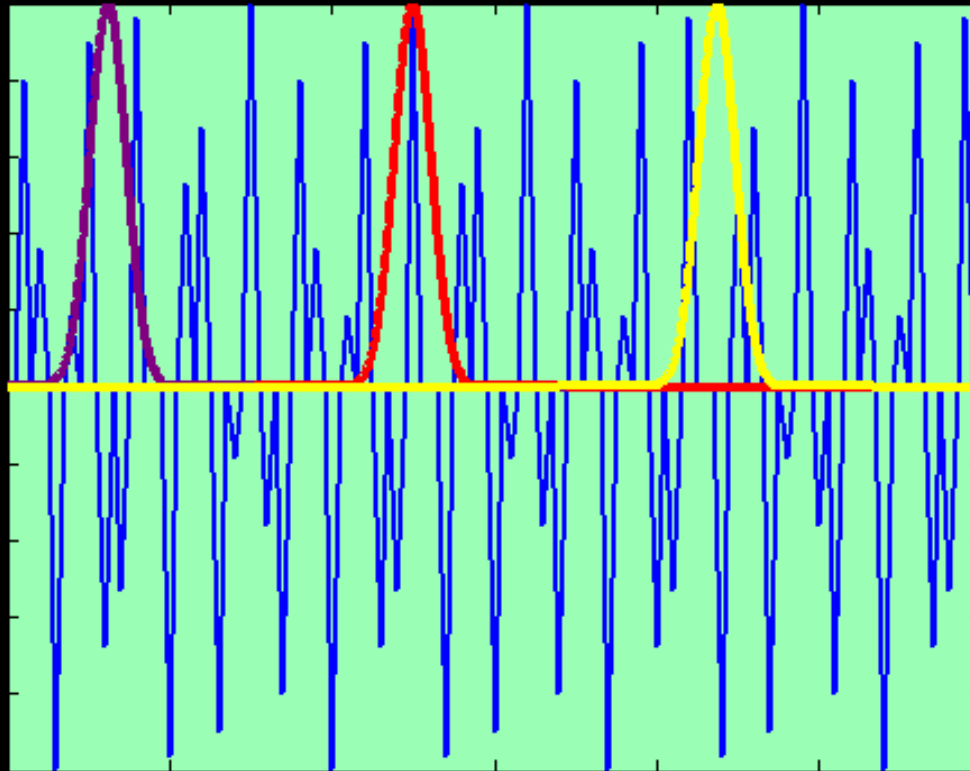


$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} * \psi(2^{-j}t - k)$$

$j = 1, k=1,2,3...$

Transformada wavelet continua

Ejemplos grafico de calculo de la transformada Wavelets.

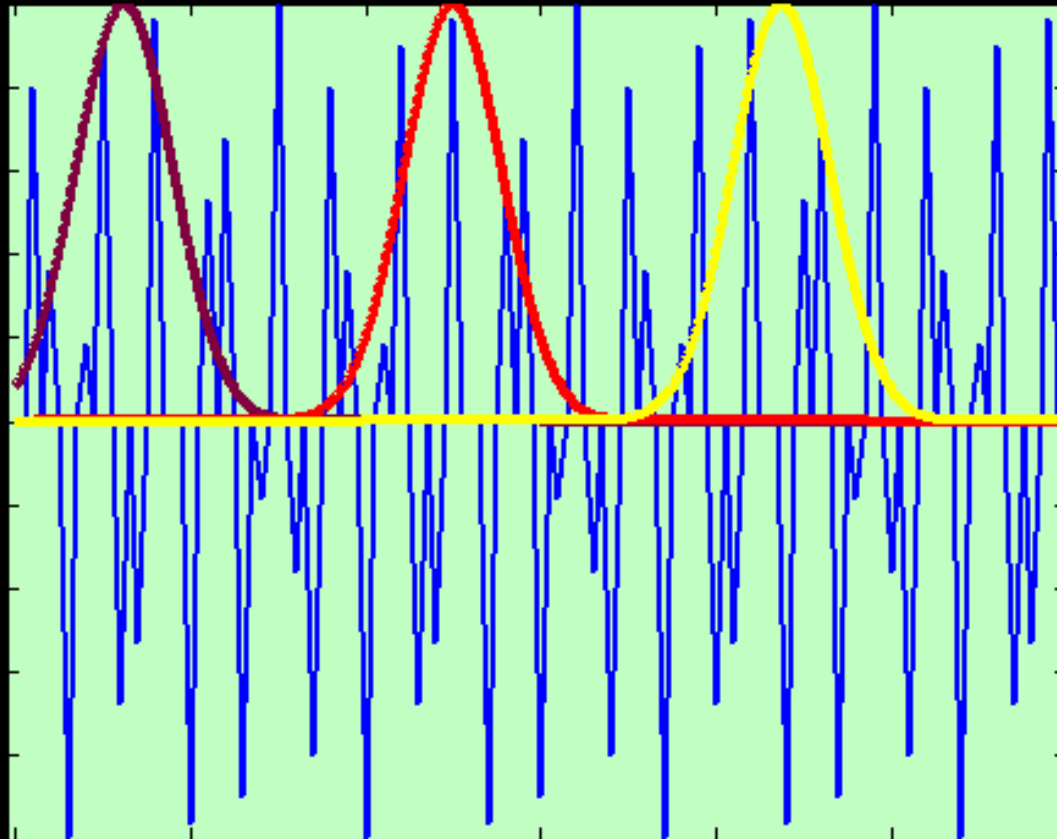


$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} * \psi(2^{-j}t - k)$$

$j = 2, k=1,2,3...$

Transformada wavelet continua

Ejemplos grafico de calculo de la transformada Wavelets.

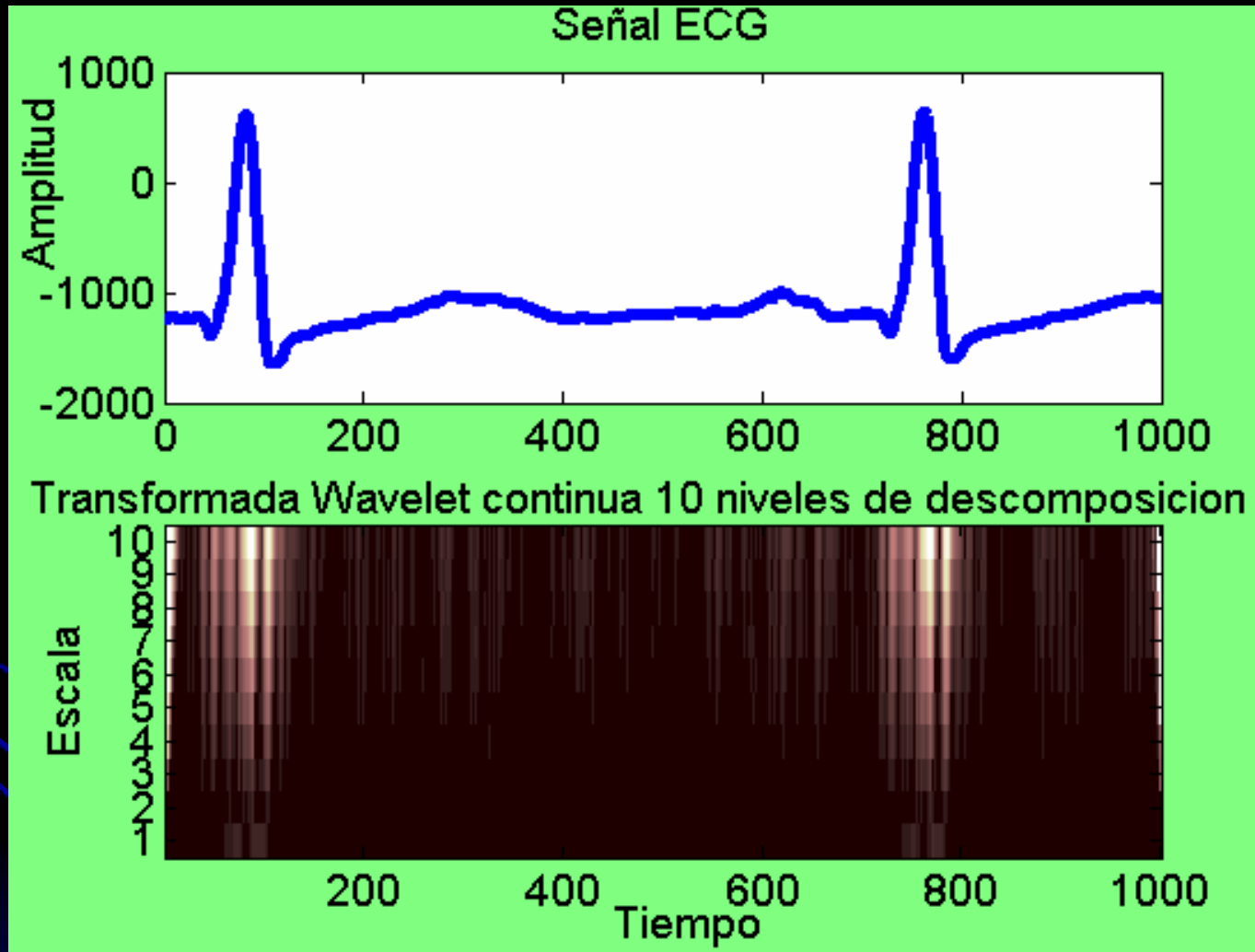


$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} * \psi(2^{-j}t - k)$$

$j = 3, k=1,2,3...$

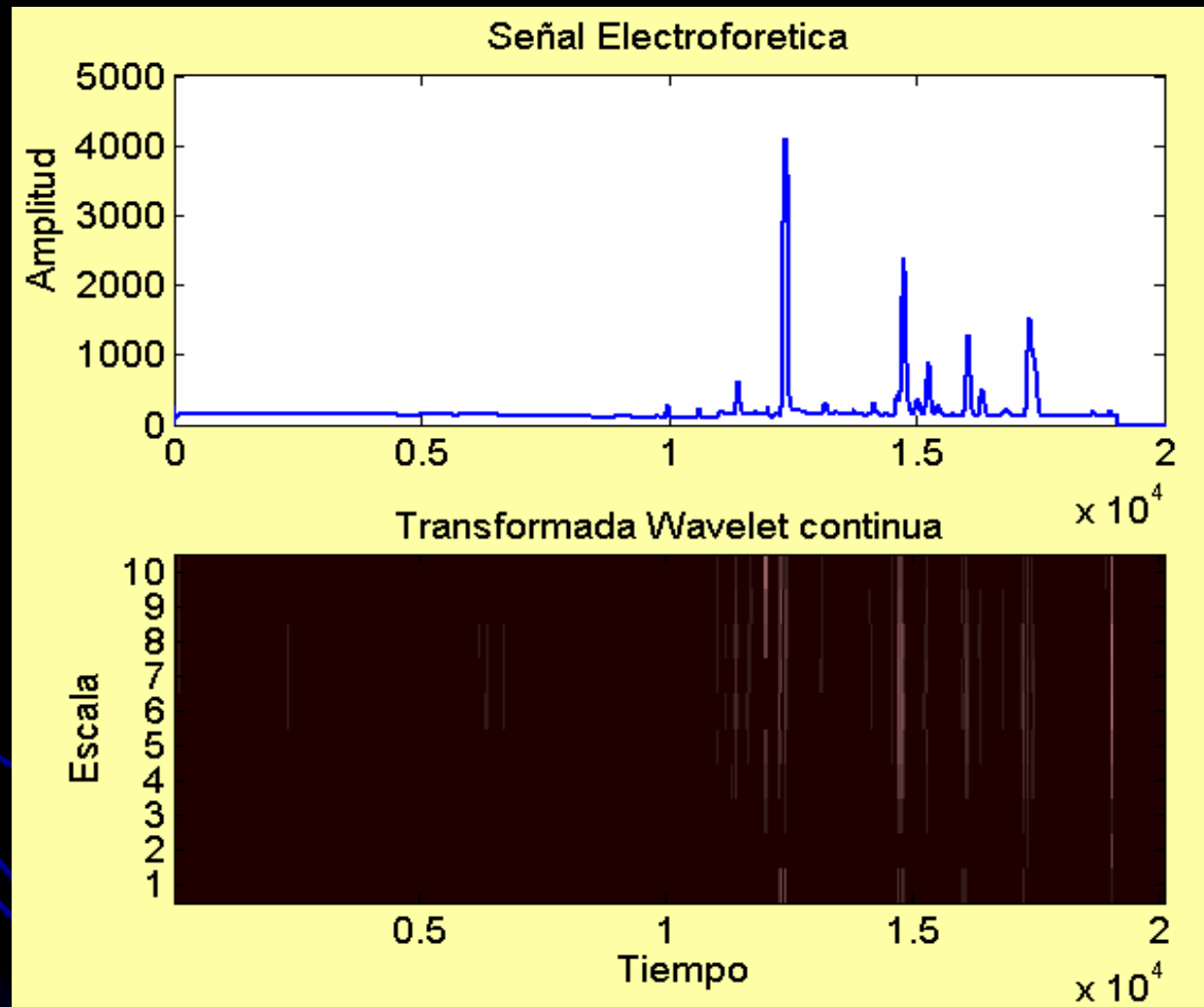
Transformada wavelet continua

Ejemplo



Transformada wavelet continua

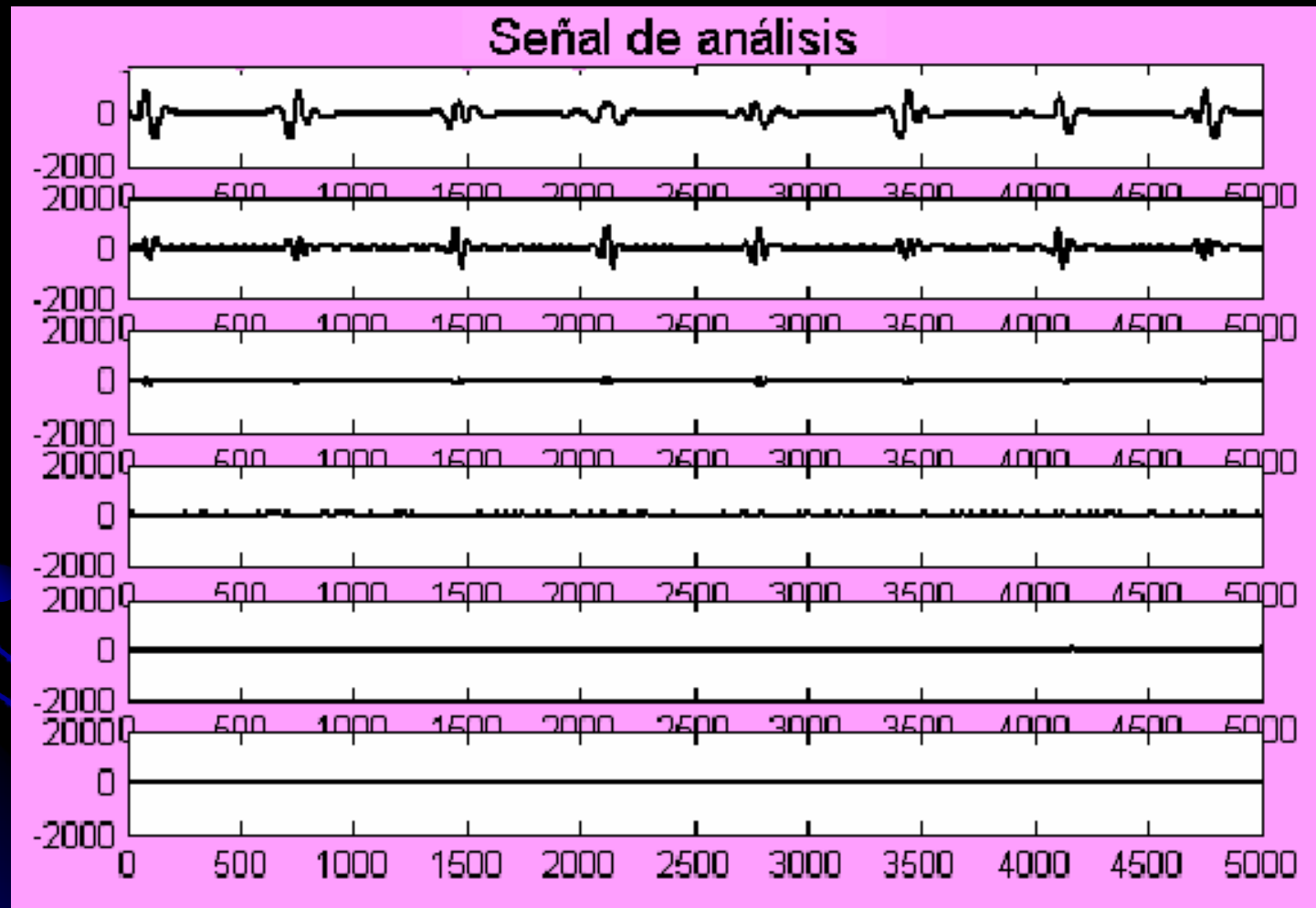
Ejemplo



Wavelet daubechies db4

Transformada wavelet continua

Ejemplo



Transformada wavelet continua

Resultados obtenidos:

Datos relativamente redundantes.

Útil en propósitos de interpretación de datos.

Datos de grado de similitud (correlación).

Transformada wavelet discreta

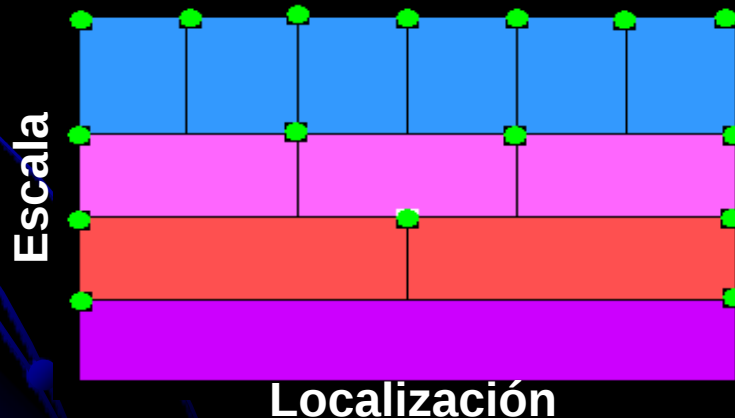
Valores discretos, datos limitados

Muestrea la transformada wavelet continua.

$$c(j, k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) * \psi_{j,k}(n)$$

$$\psi_{j,k}(n) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left[\frac{n - 2^j k}{2^j} \right]$$

Los valores de escala y traslación son muestreados sobre una rejilla denominada **dyadic grid**



Transformada wavelet discreta

Banco de filtros (algoritmo de mallat)

Es una estructura que descompone una señal dentro de una colección de subseñales, que a su vez representan a la señal original.

Metas:

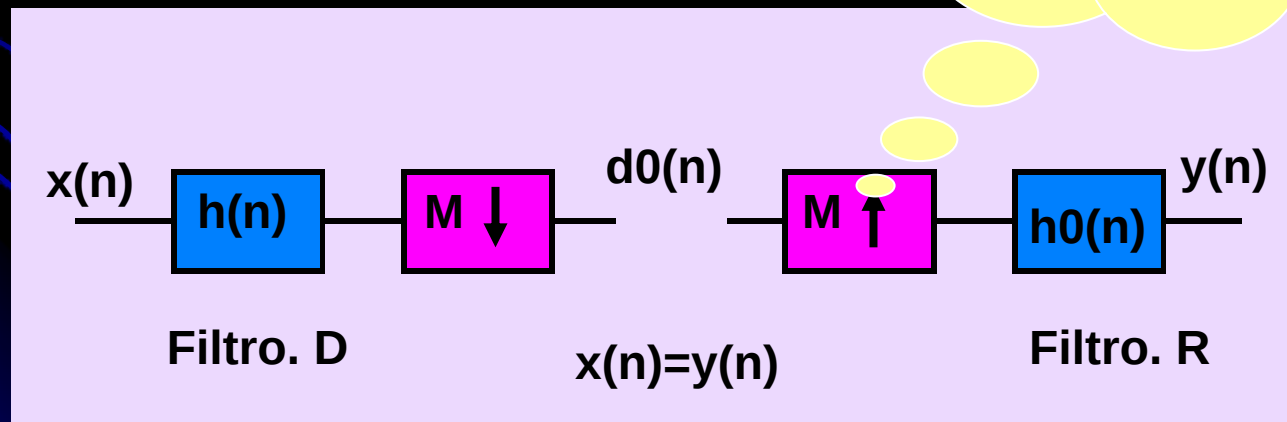
Reconstrucción perfecta.

Utilidad: Dependiendo de la aplicación.

M es la cantidad
de muestras.

↓ Elimina.

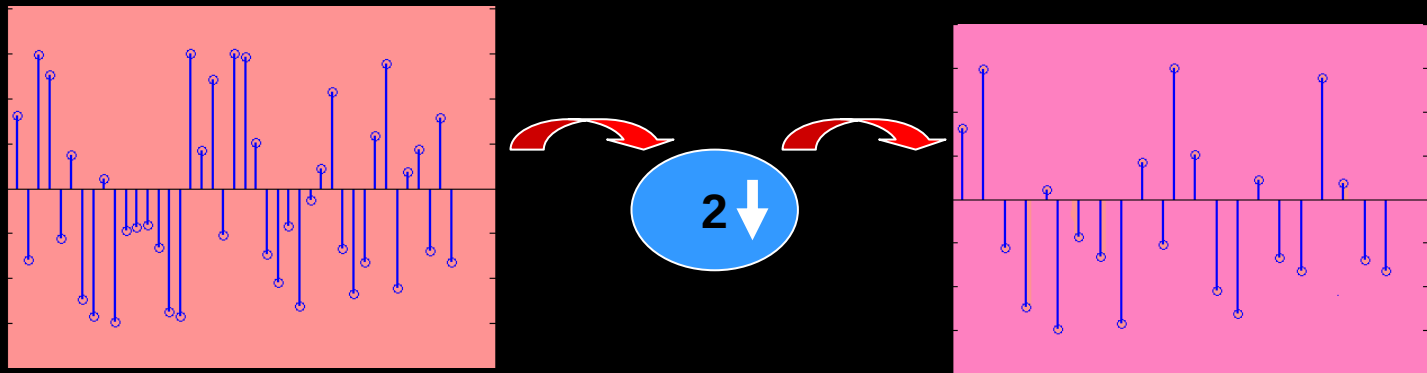
↑ Añade



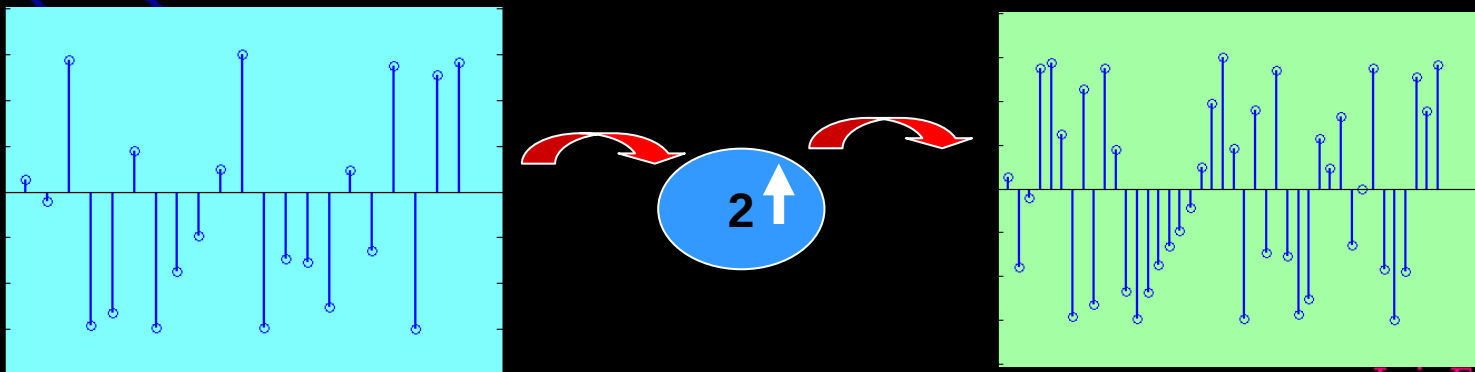
Transformada wavelet discreta

La resolución depende de las variaciones de la escala determinadas por la operación de muestreo.

Downsampling: Remover muestras durante el análisis de la señal.



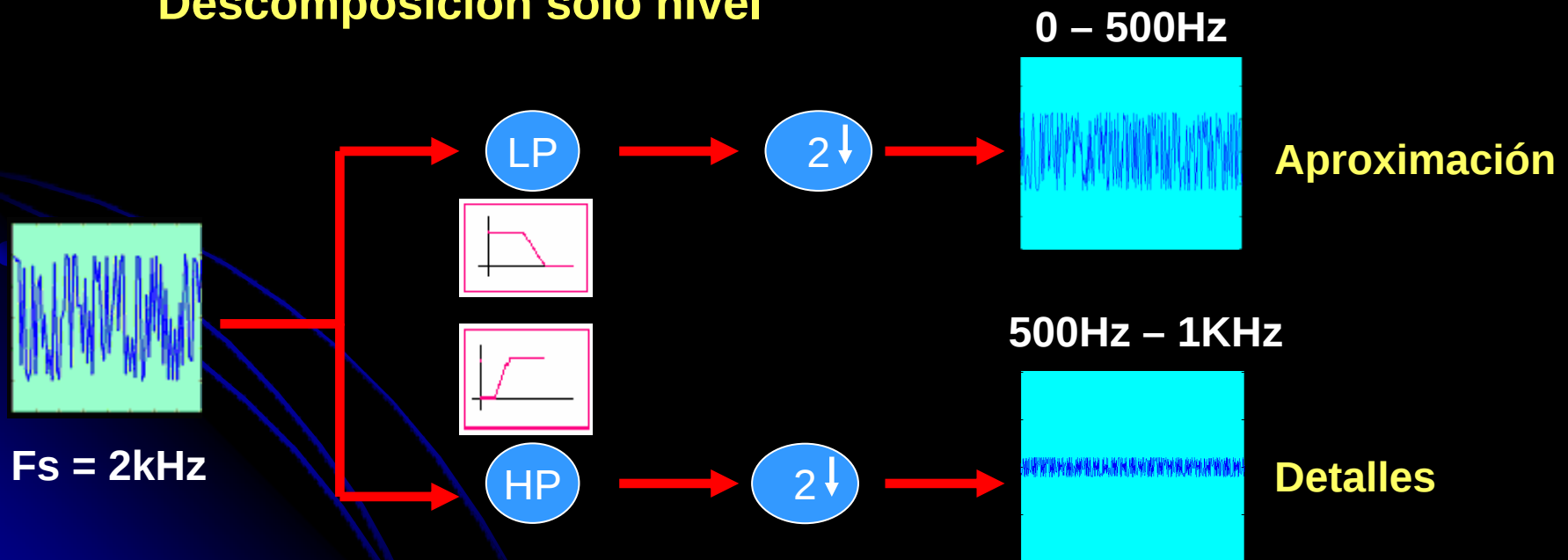
Upsampling: Añadir nuevas muestras a la señal



Implementación transformada wavelet discreta

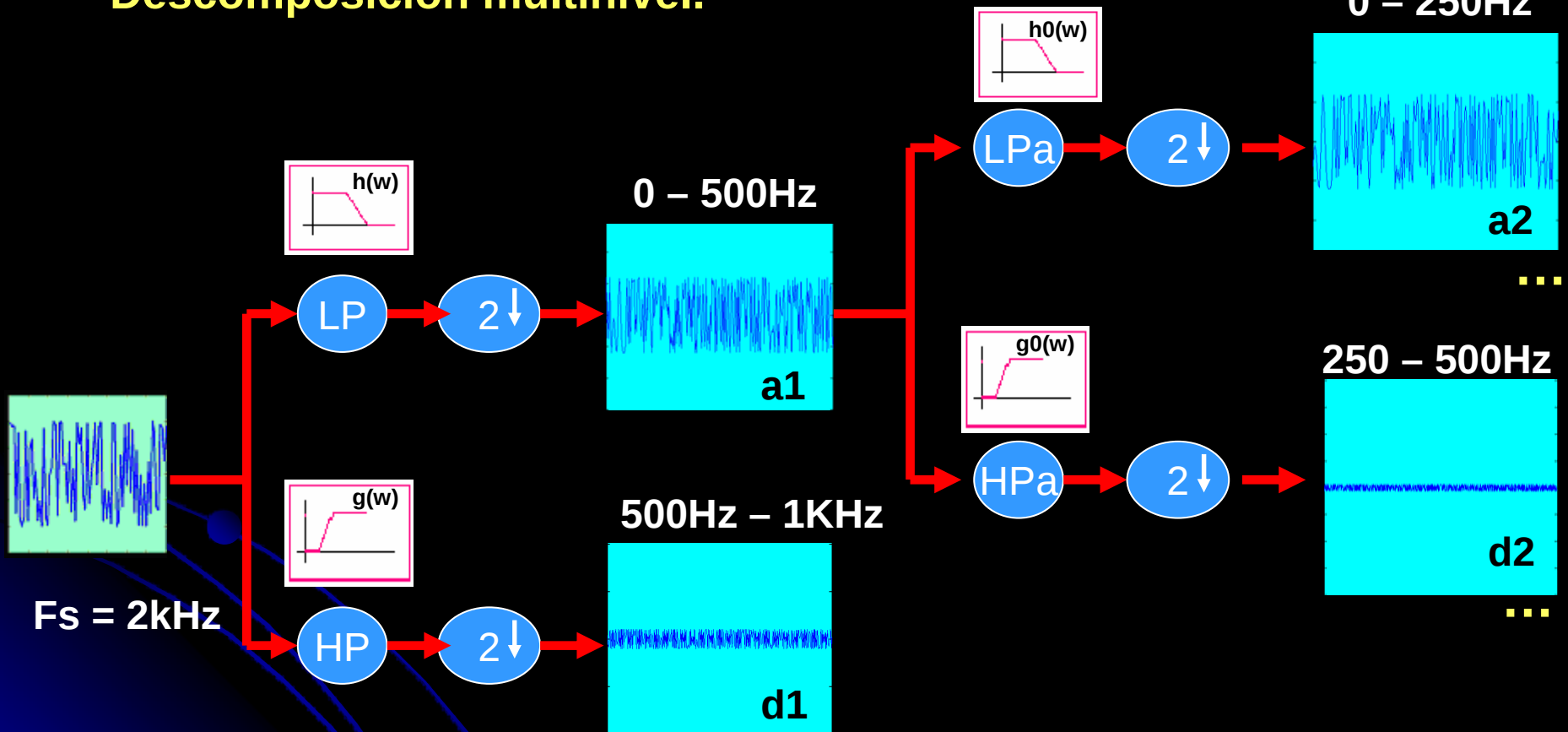
Técnica de filtrado digital: La señal pasa a través de una serie de filtros pasa bajas (Coef aproximación) y filtros pasa altas (Coef detalle).

Descomposición solo nivel



Transformada wavelet discreta

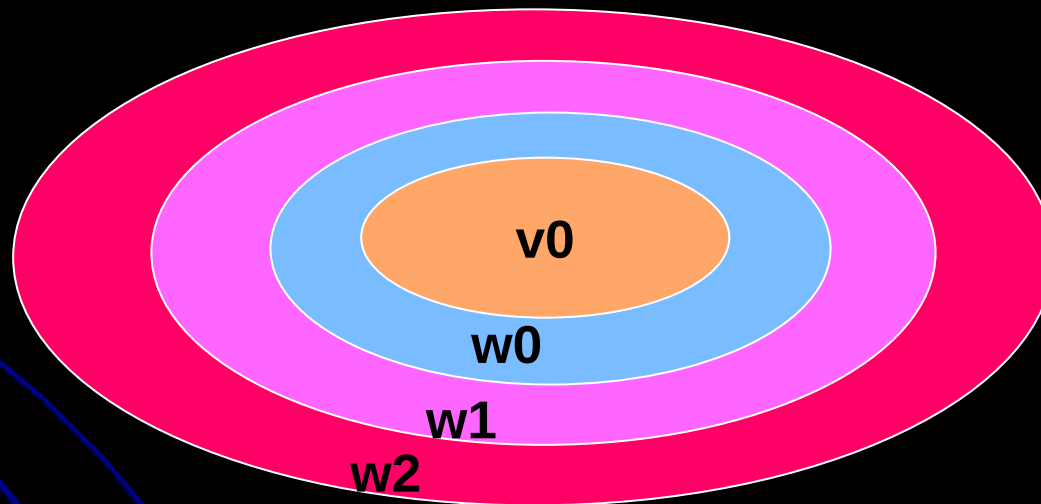
Descomposición multinivel.



Transformada wavelet inversa discreta

$$f(n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(j, k) \psi_{j,k}(n)$$

$$\psi_{j,k}(n) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left[\frac{n - 2^j k}{2^j} \right]$$

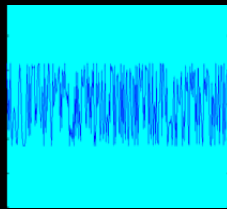


Niveles de descomposición

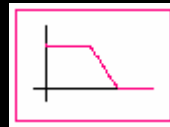
Reconstrucción de la señal o síntesis.

Reconstrucción por filtrado

Aproximación

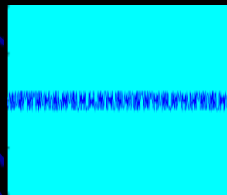


$2 \uparrow$

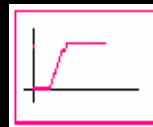


LPa

Detalles

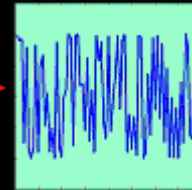


$2 \uparrow$



HPa

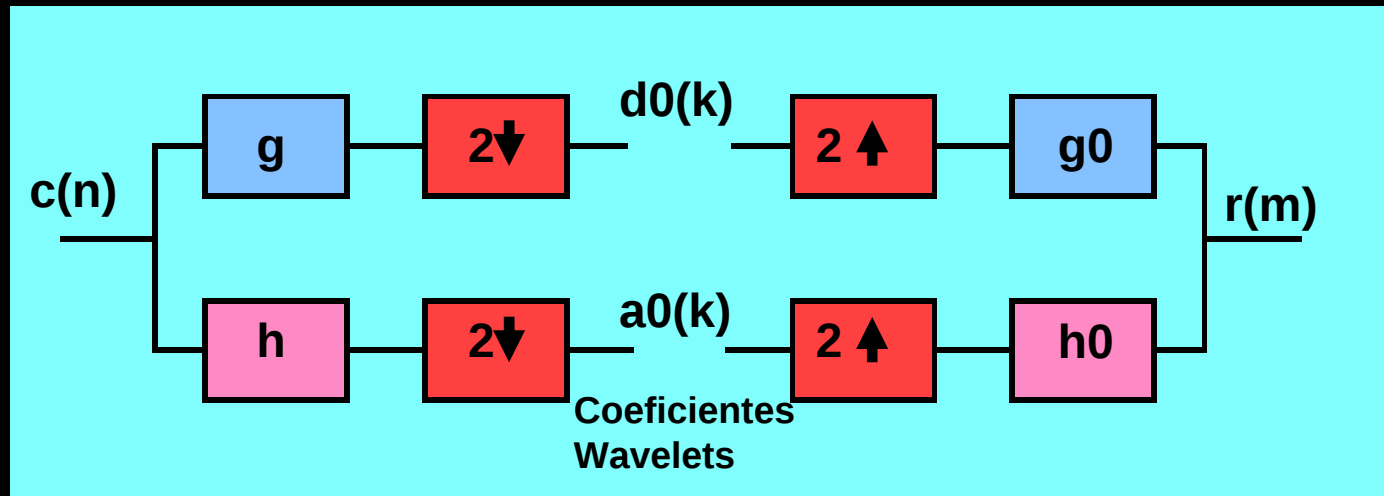
Señal original



Reconstrucción

Upsampling

Relación de los filtros



$$a_0(k) = \sum_n h(2k - n) * c(n)$$

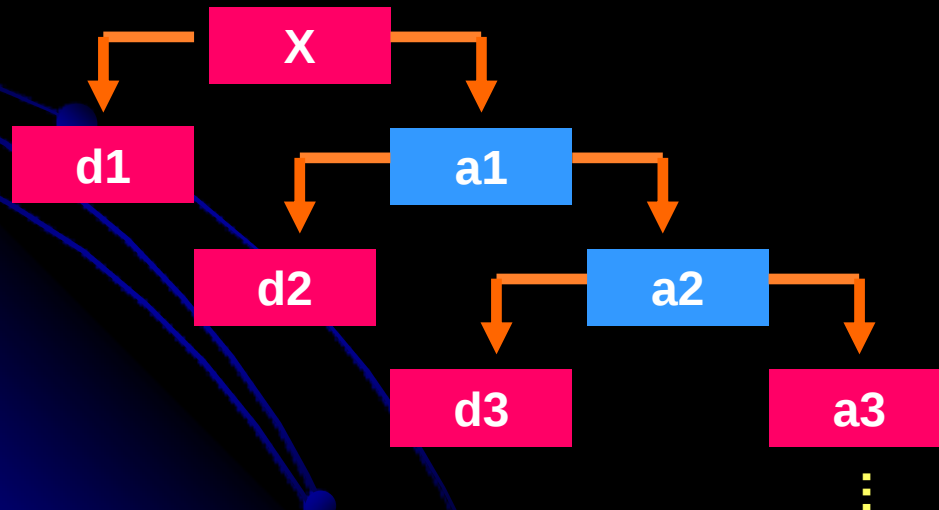
$$d_0(k) = \sum_n g(2k - n) * c(n)$$

$$g(n) = (-1)^n g_0(1 - n)$$

Reconstrucción de la señal o síntesis.

Reconstrucción con la ayuda de los coeficientes de aproximación y de detalle.

Antes de hacer las combinación de debe tener en cuenta la reducción de la longitud de la señal original, para esto se reconstruyen primero los coeficientes (Upsampling).



$$X = d1 + a1$$

$$X = d1 + d2 + a2$$

$$X = d1 + d2 + d3 + a3$$

Relación de los filtros y las formas de las wavelets.

La opción de los filtro no solo se hace para reconstrucción perfecta, también determina la forma de onda de la wavelet madre.

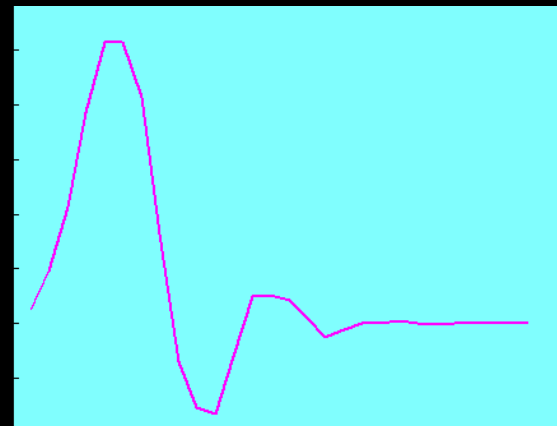
- Pasos:
1. Selección de los coeficientes del filtro.
 2. Upsampling (pair o odd).
 3. Convolución entre señal Upsampling y los coeficientes del filtro.

Ejemplo: Coeficientes del filtro

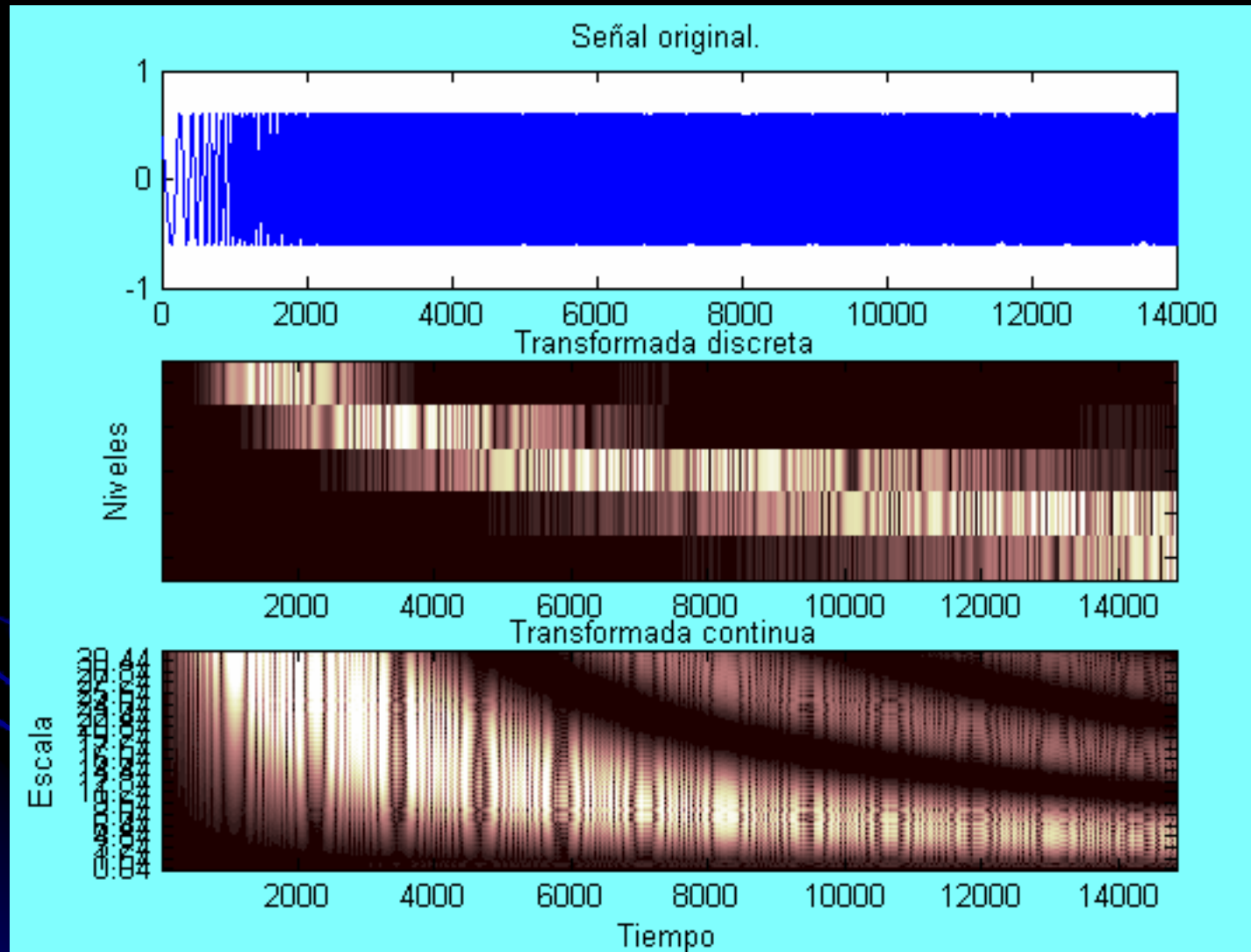
h = 0.1132 0.4270 0.5122
0.0979 -0.1713 -0.0228
0.0549 -0.0044 -0.0089 0.0024

H1= 0.1132 0 0.4270 0
0.5122 0 0.0979 0
-0.1713 0 -0.0228 0
0.0549 0 -0.0044 0
-0.0089 0 0.0024

Grafica de la Convolución wavelet para el análisis



Transformada wavelet continua y discreta



Funciones wavelet multibanda-M

$$\varphi(t) = \sum_n h(n) \sqrt{M} \varphi(Mx - n)$$

$$\sum_n h(n) = \sqrt{M}$$

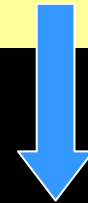
M Bandas

$$f(t) = \sum_k c(k) \varphi_k(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{M-1} M^{\frac{j}{2}} d_{r,j}(k) \psi_{j,k}(M^j t - k)$$



$$V_0$$

Aproximación



$$\sum_n w_n$$

Detalles

$$c(k) = \int f(t) \varphi(t - k) dt$$

$$d_{r,j}(k) = \int f(t) M^{\frac{j}{2}} \psi_r(M^j t - k) dt$$

Lowpass

Descomposición

$$h(n) = (-1)^n * h_0(1 - n)$$

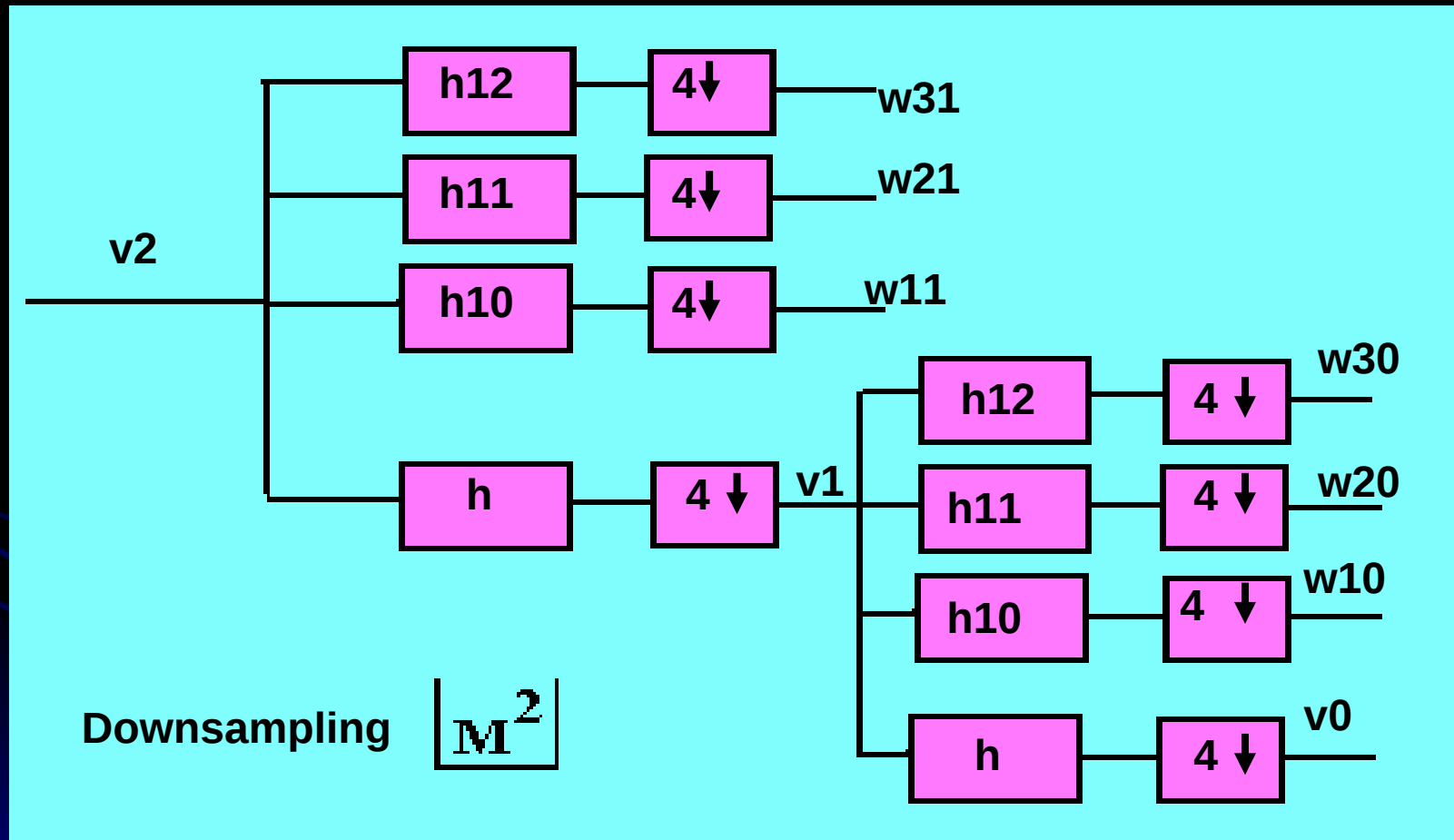
Relación de filtros

Lowpass

reconstrucción

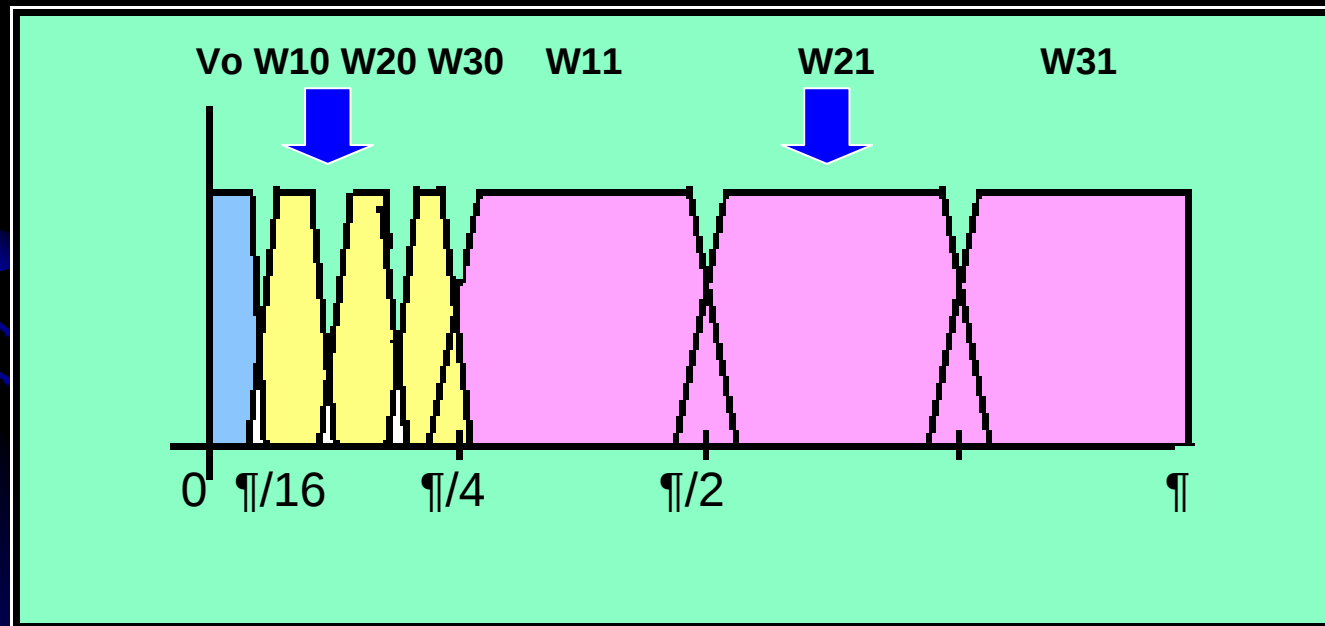
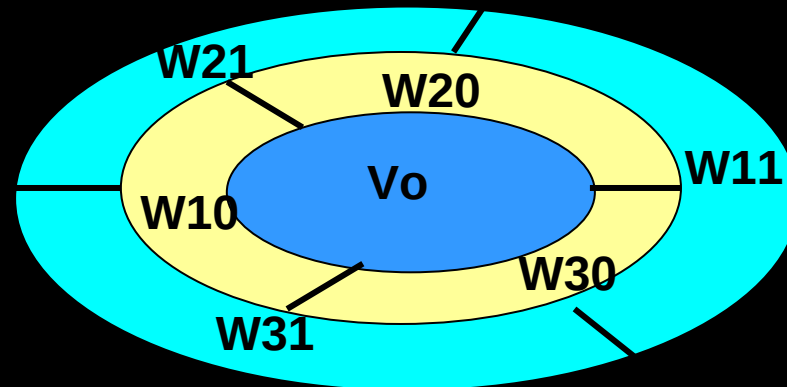
Funciones wavelet multibanda-M

Sistema Wavelet M-bandas M=2



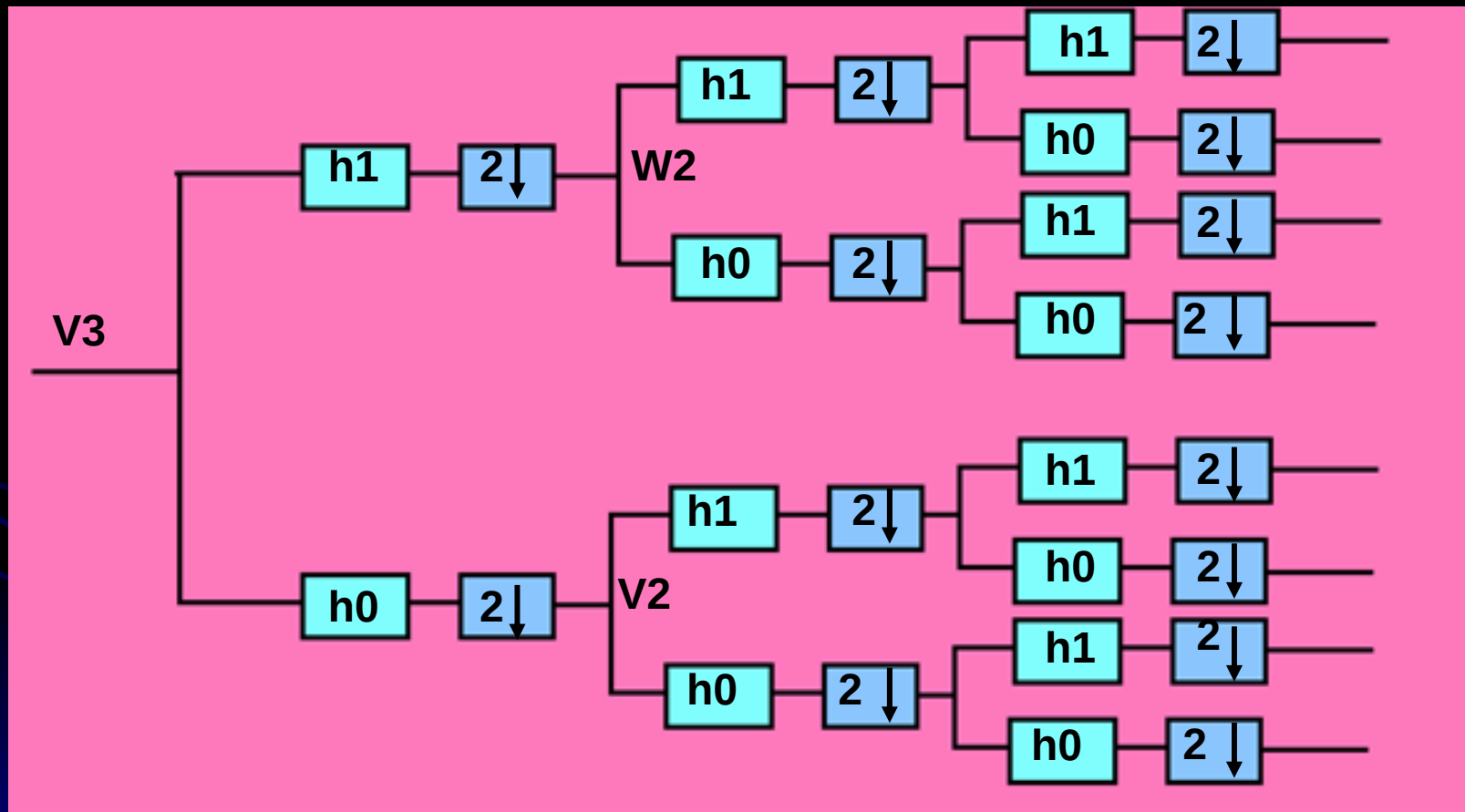
Filter Bank

Funciones wavelet multibanda-M



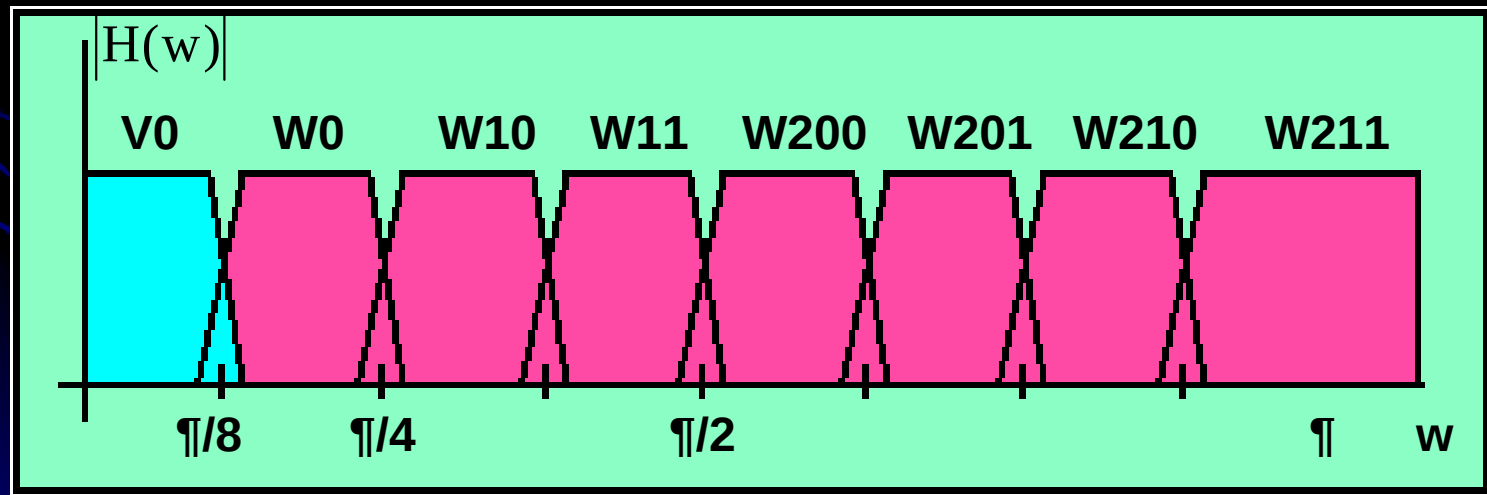
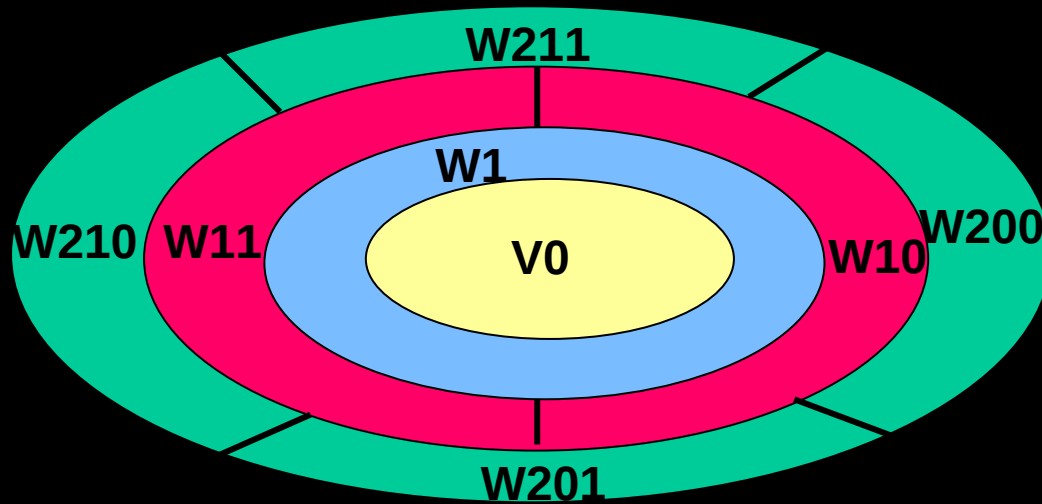
Descomposición packet wavelet completa

Wavelet packet 2



$$h_1(n) = (-1)^n * h_0(1-n)$$

Descomposición packet wavelet completa



Multiwavelets

$$\phi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t),]$$

$$\gamma(t) = [\psi_1(t), \psi_1(t), \dots, \psi_r(t),]$$

$$\varphi_{i,j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi_i(2^j t - k)$$

$$\gamma(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k)$$

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k)$$

$$c_{i,j}(k) = \langle f(t), \varphi_{i,j,k}(t) \rangle$$

$$d_{i,j}(k) = \langle f(t), \psi_{i,j,k}(t) \rangle$$

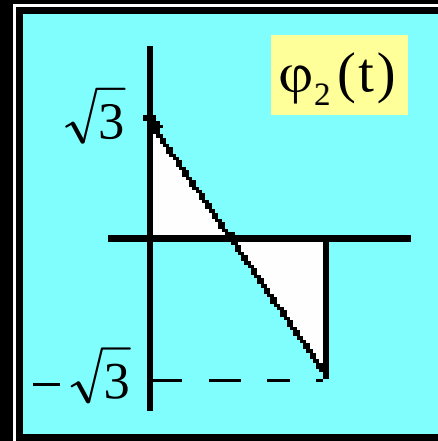
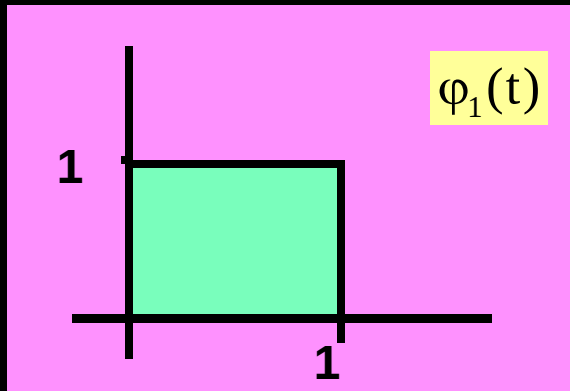
$$C_j(k) = [c_{1,j}(k), \dots, c_{r,j}(k)]$$

$$D_j(k) = [d_{1,j}(k), \dots, d_{r,j}(k)]$$

$$f(t) = \sum_k C(k) \phi_k(t) + \sum_j \sum_k D_j(k)_{j,k} \gamma(t)$$

Multiwavelets

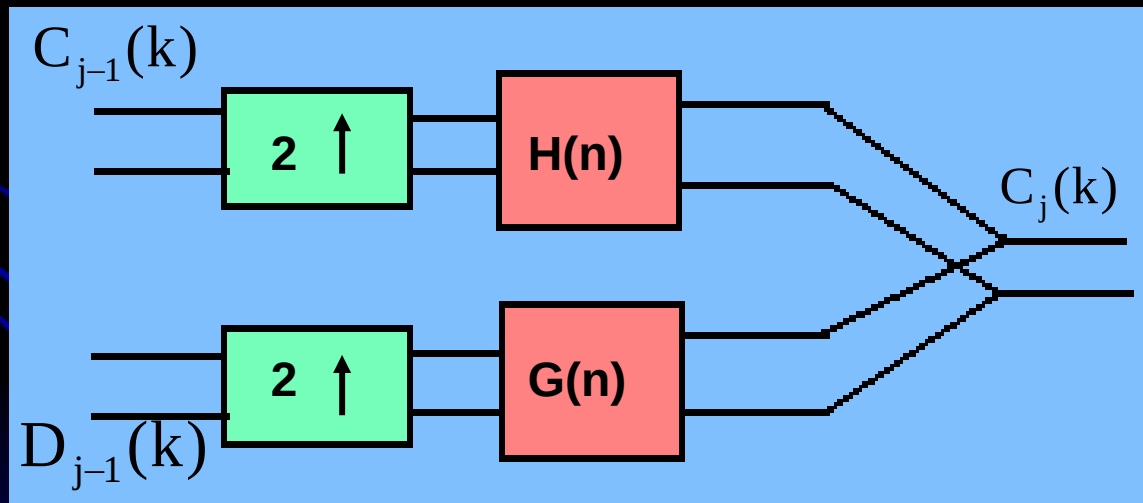
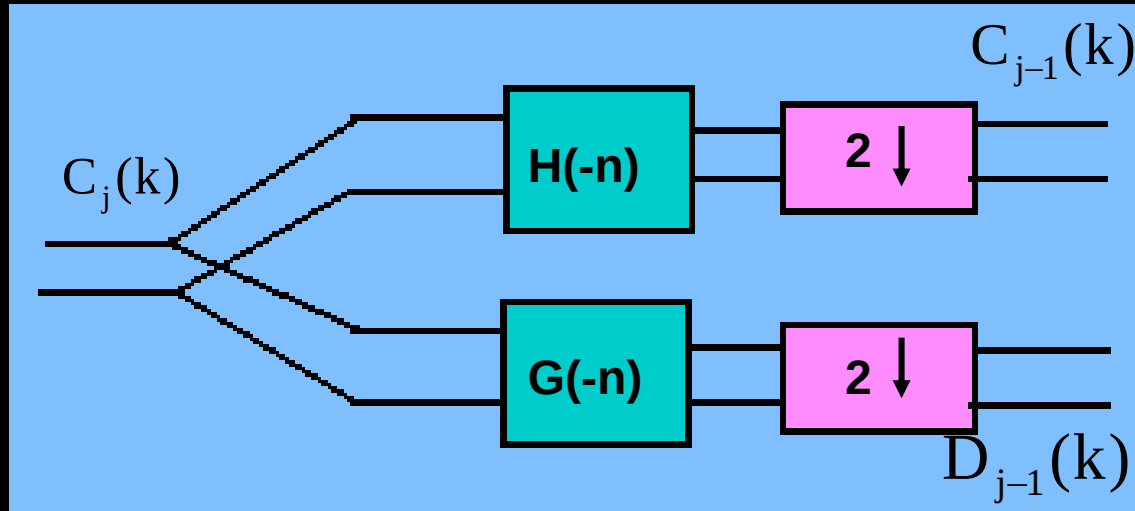
Ejemplo



Una combinación lineal para representar $\varphi_2(t)$ en función de ella misma y $\varphi_1(t)$ es:

$$\varphi_2(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \varphi_1(2t) + \frac{1}{2} \varphi_2(2t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \varphi_1(2t-1) + \frac{1}{2} \varphi_2(2t-1)$$

Multiwavelets



Transformada multiwavelet discreta

Procesamiento de Imágenes con Wavelets

Se trabajara en dos dimensiones.

La imagen es descompuesta en una aproximación y tres correspondientes: detalles verticales, horizontales y diagonales.

$$\psi^1_{j+1,m,n} = \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \phi\left[\frac{x}{2^{j+1}} - n\right] \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \psi\left[\frac{y}{2^{j+1}} - m\right]$$



Detalles verticales

$$\psi^2_{j+1,m,n} = \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \psi\left[\frac{x}{2^{j+1}} - m\right] \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \phi\left[\frac{y}{2^{j+1}} - n\right]$$



Detalles horizontales

$$\psi^3_{j+1,m,n} = \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \psi\left[\frac{x}{2^{j+1}} - m\right] \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \psi\left[\frac{y}{2^{j+1}} - m\right]$$



Detalles diagonal

$$\psi_{j+1,m,n} = \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \phi\left[\frac{x}{2^{j+1}} - n\right] \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \phi\left[\frac{y}{2^{j+1}} - m\right]$$



Aproximación

Procesamiento de Imágenes con Wavelets

Filtros

Un filtro bidimensional se puede expresar a partir de 2 filtros unidimensionales de la siguiente manera:

$$h(n, m) = h(n)h(m)$$

$$g(n, m) = g(n)g(m)$$

Como

$$\langle f, \varphi_{j,n} \rangle = a_j[n]$$

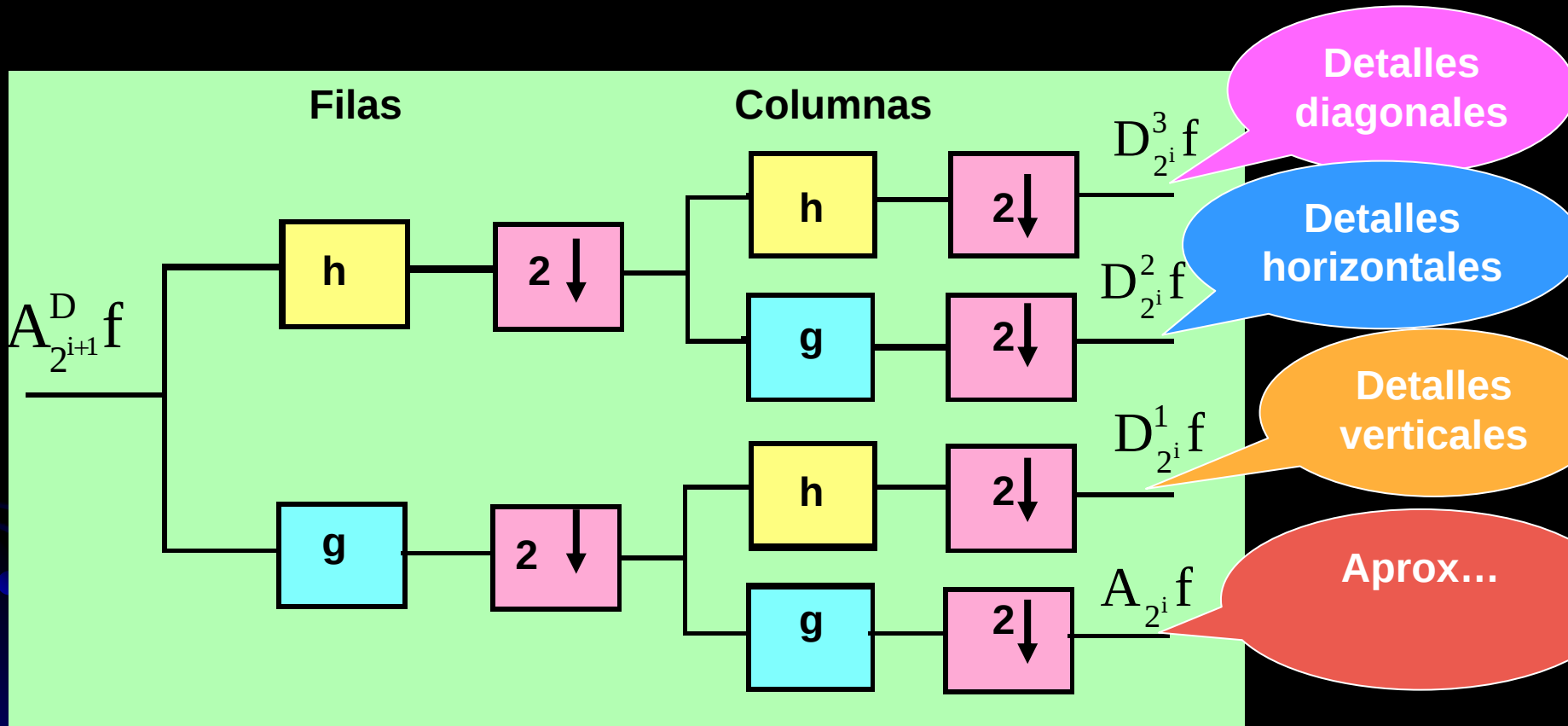
$$\langle f, \psi_{j,n} \rangle = d_j[n]$$



$$a_{j+1}[p] = \sum a_j[n]h(2p - n)$$

$$d_{j+1}[p] = \sum a_j[n]g(2p - n)$$

Procesamiento de Imágenes con Wavelets

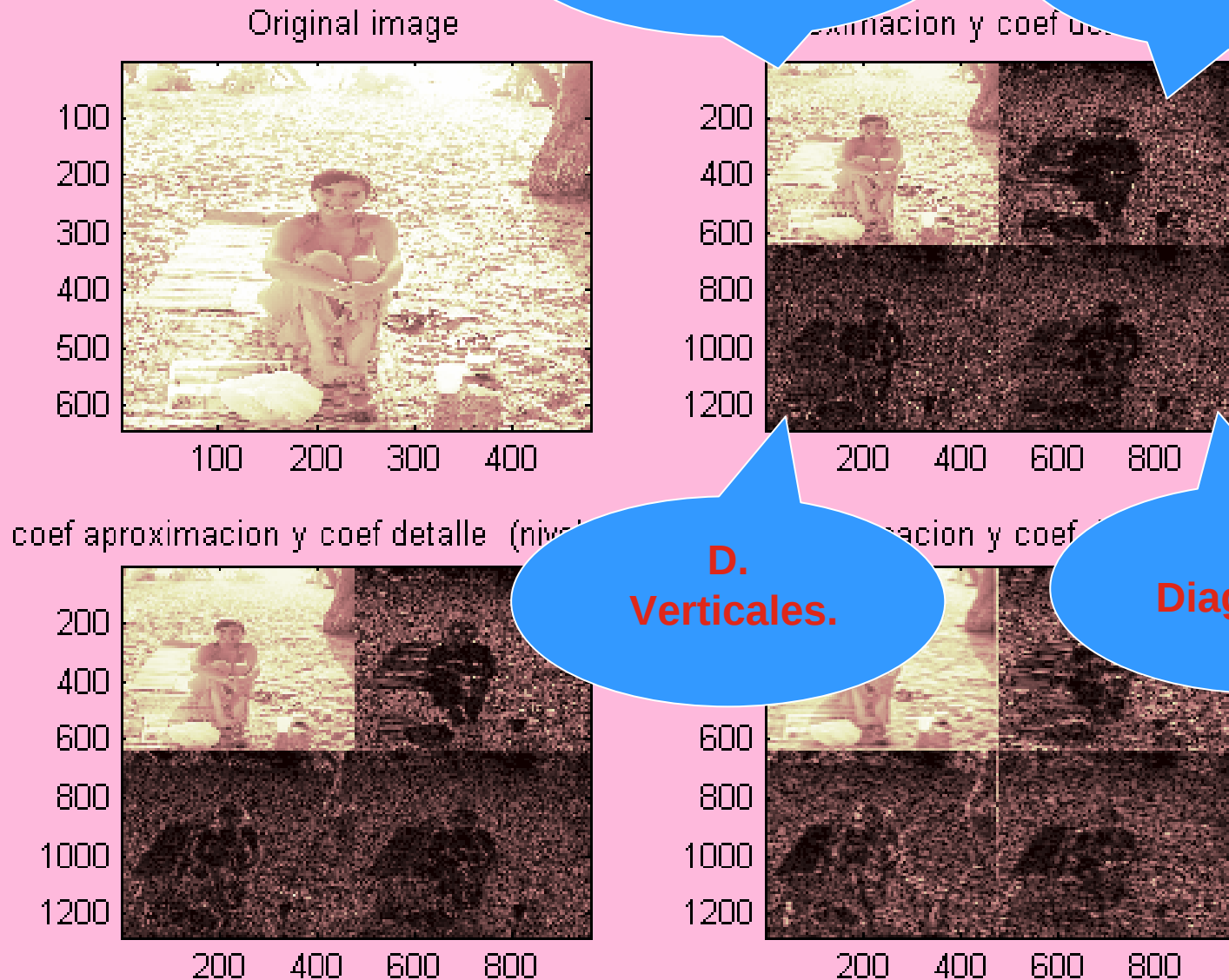


Algoritmo de Mallat (descomposición)

Aplicaciones

C. Aproximación.

C. D. Horizontales.



Aplicaciones

- Detección de discontinuidades y puntos de sobresalto en la señal (análisis local).
- Detección de evoluciones a largo plazo.
- Detección de una misma particularidad (semejanza).
- Identificación del espectro de frecuencia.
- Supresión de señales.
- Eliminación de ruido en imágenes y señales.
- Compresión de imágenes y señales.
- Multiplicación rápida de matrices.

BIBLIOGRAFIA

www.mathworks.com

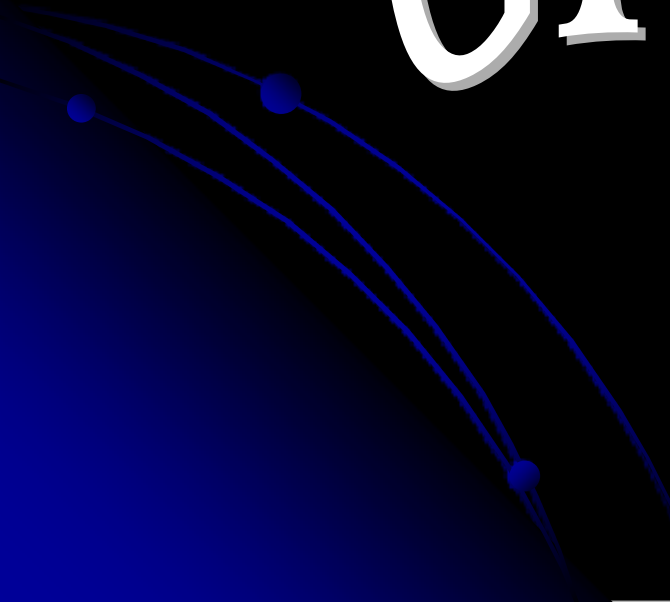
Introduccion to wavelets and wavelets transforms, C. Sidney, Ramesh A. Gopinath, Haitao G.

www.amara.com

math.yale.edu/pub/wavelets/software/xwpl/html/xwpl

PREGUNTAS

?



GRACIAS

Luis E. Mendoza