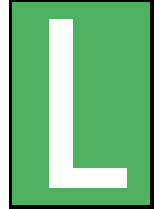


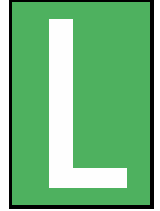
**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
POSGRADO INGENIERÍA BIOMÉDICA
ENERO 2007**



ANÁLISIS FRECUENCIAL DE SEÑALES

LUIS ENRIQUE MENDOZA

AGENDA



INTRODUCCIÓN.

DEFINICIÓN.

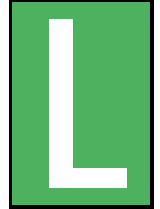
SEÑALES ESTACIONARIAS Y NO ESTACIONARIAS.

TRANSFORMADA DE FOURIER.

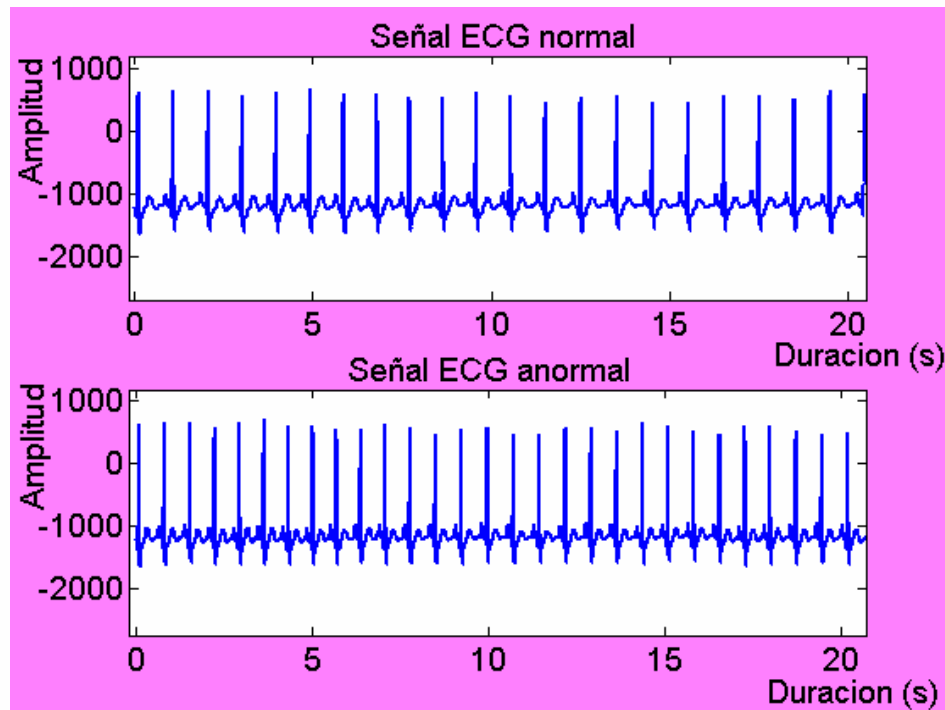
TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO CORTO.

INTRODUCCIÓN TRANSFORMADA WAVELET.

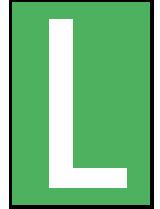
INTRODUCCIÓN



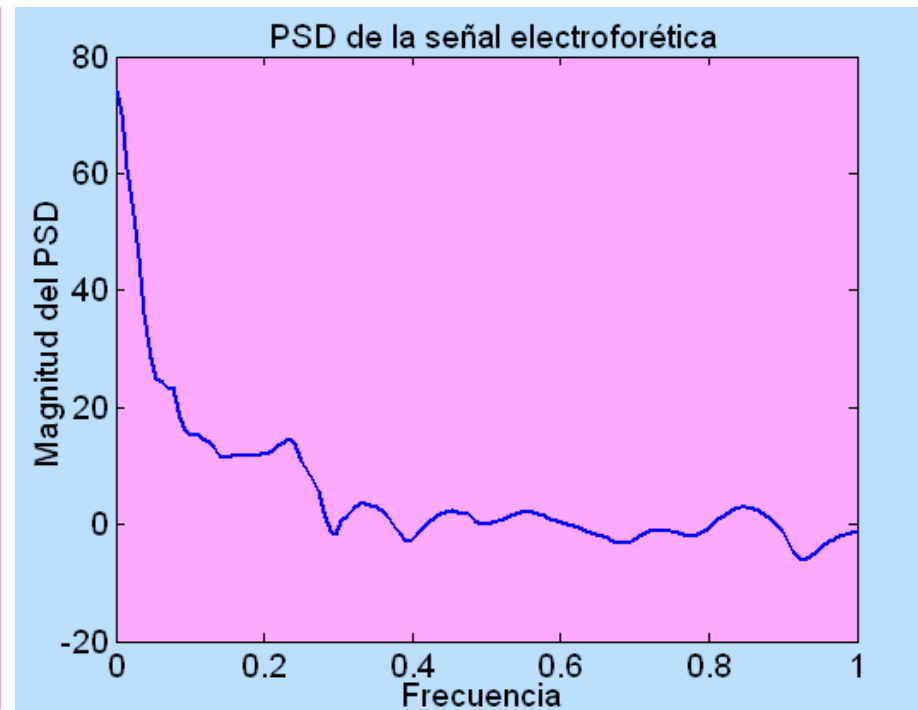
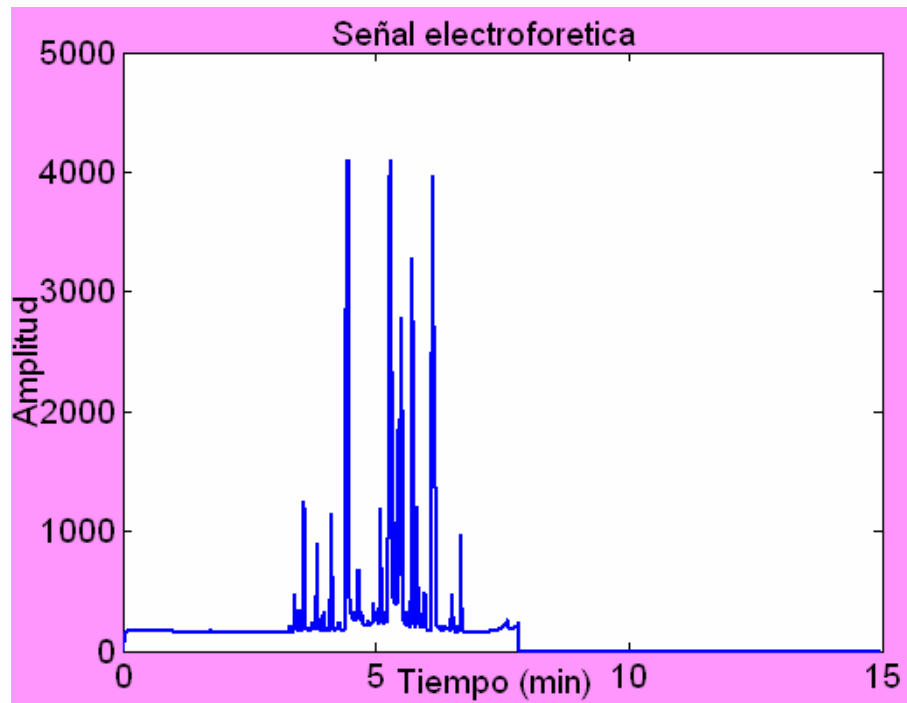
Muchos de los fenómenos físicos se pueden describir en el dominio del tiempo (variable independiente tiempo, amplitud variable dependiente), sin embargo la información que se puede obtener de esta representación no es siempre la mejor, puesto que la información que caracteriza esta señal puede verse mas claramente en el dominio de la frecuencia.



DEFINICIÓN

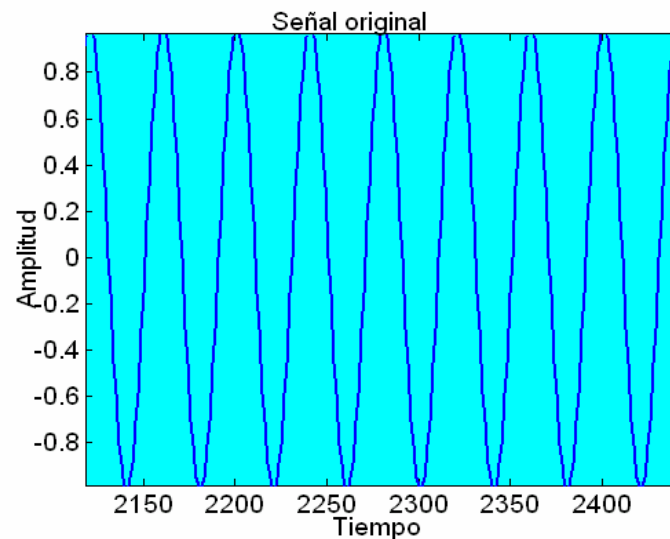
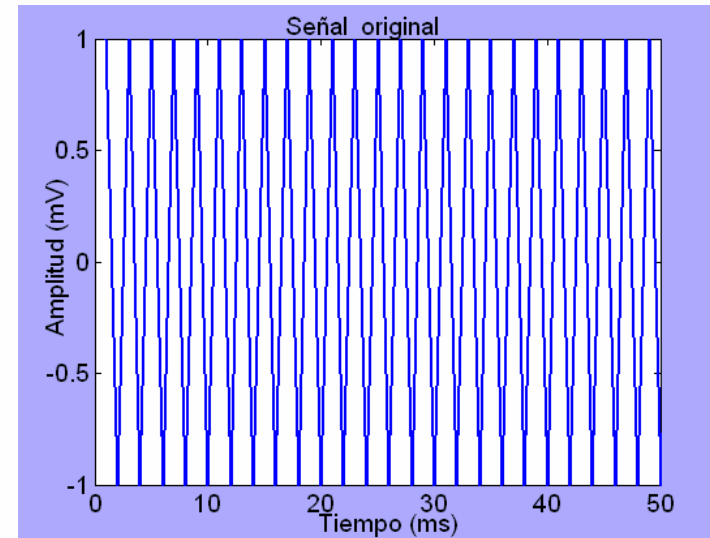
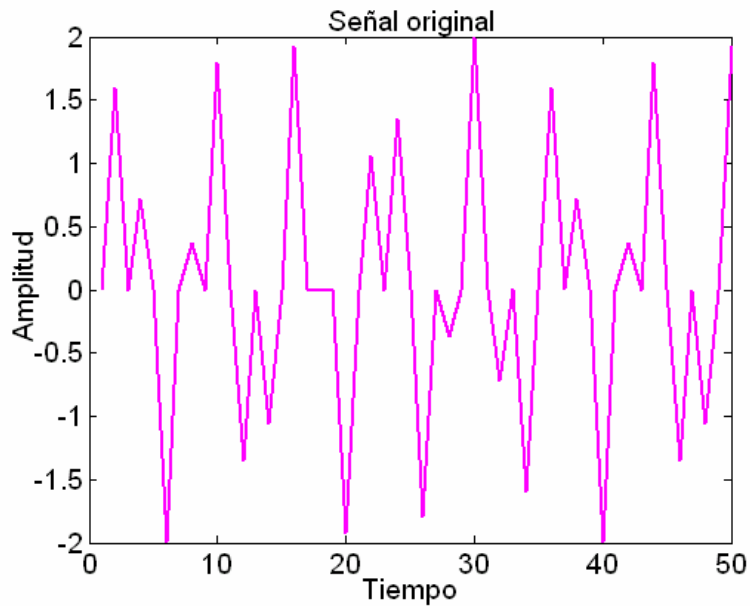
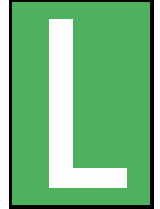


Las transformadas son modelos matemáticos que se pueden aplicar a cualquier tipo de señales, para así tener la mayor información que se pueda de dicha señal. Generalmente se asume que las señal en estado original se definen en el dominio del tiempo.

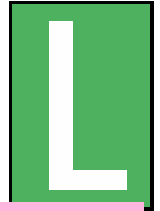


SEÑAL ESTACIONARIA

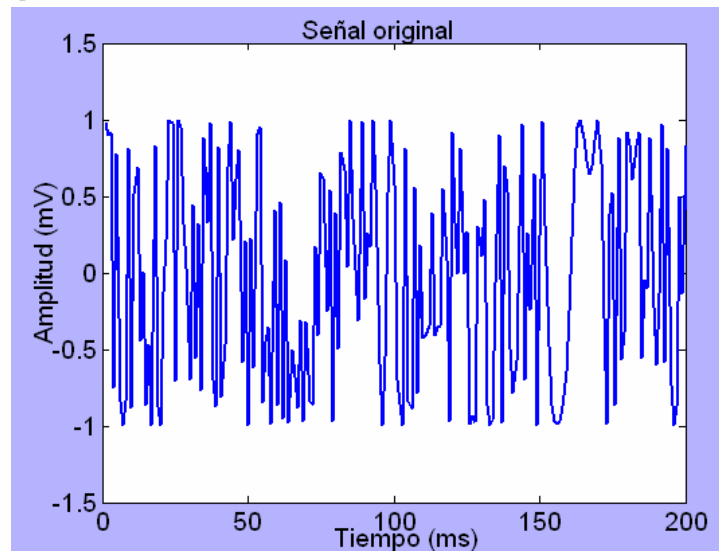
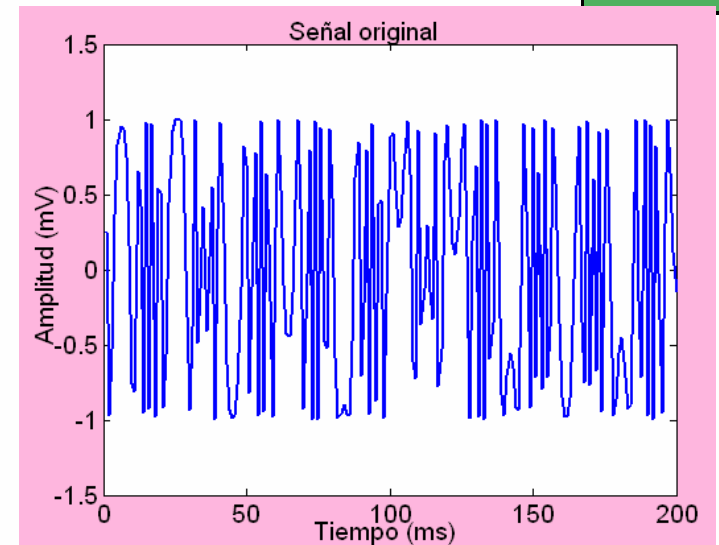
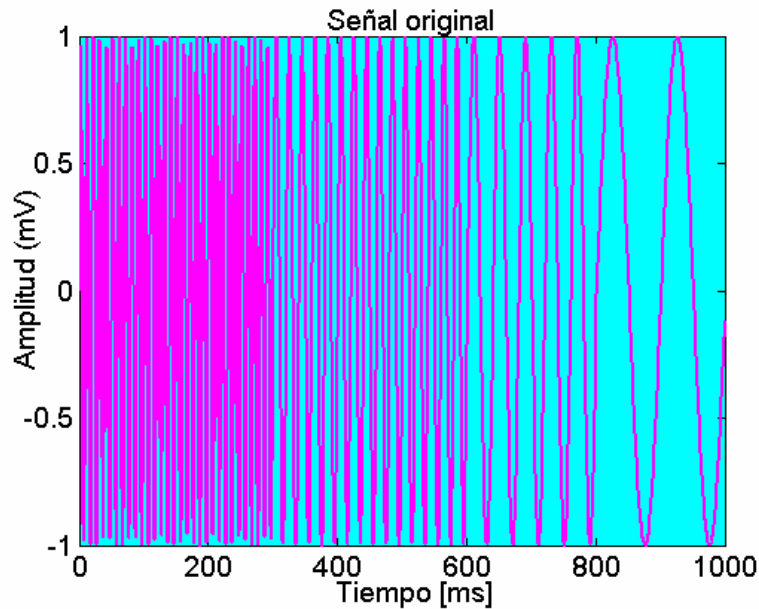
Señal cuya frecuencia no varia con el tiempo



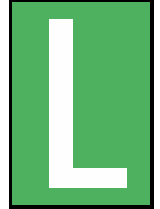
SEÑALES NO ESTACIONARIAS



Señal cuya frecuencia varia con el tiempo

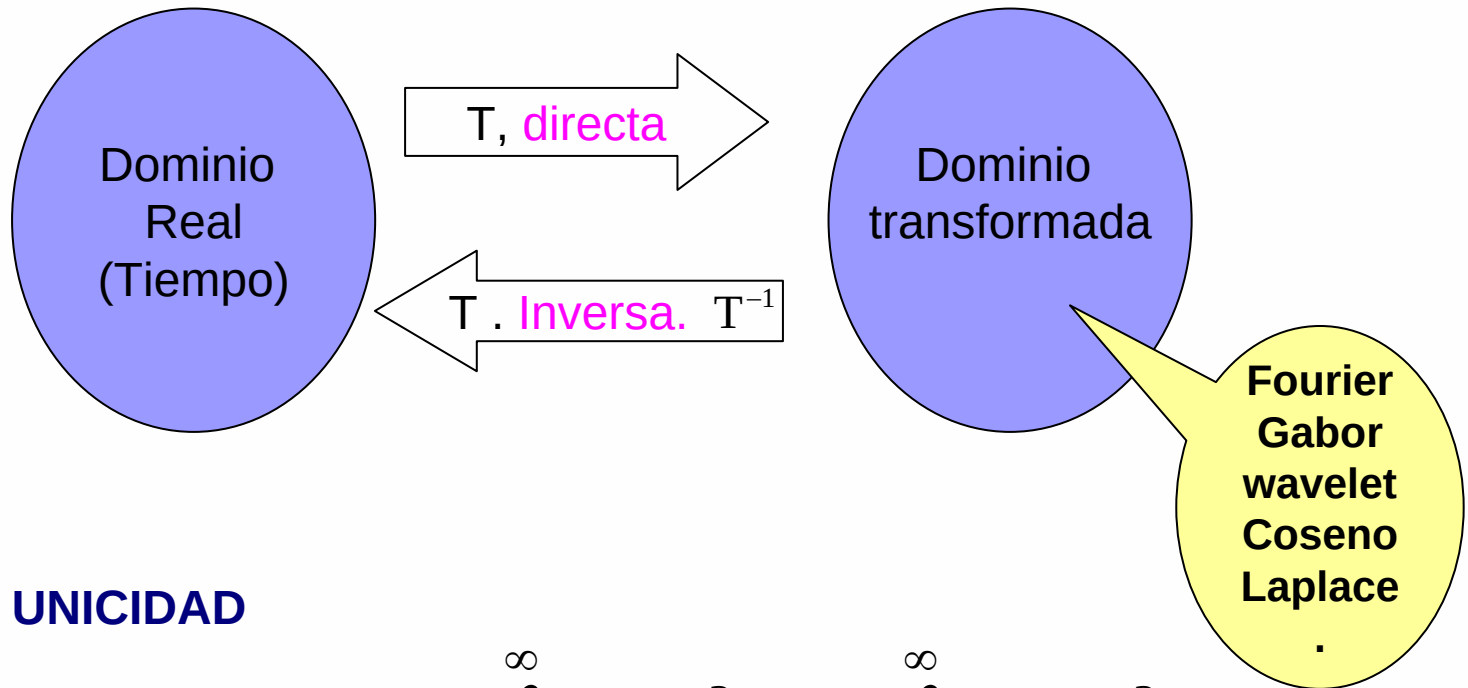


TRANSFORMADA



Propiedades de una transformada

Reversible

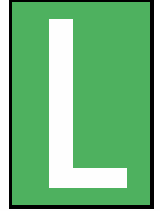


Teorema de UNICIDAD

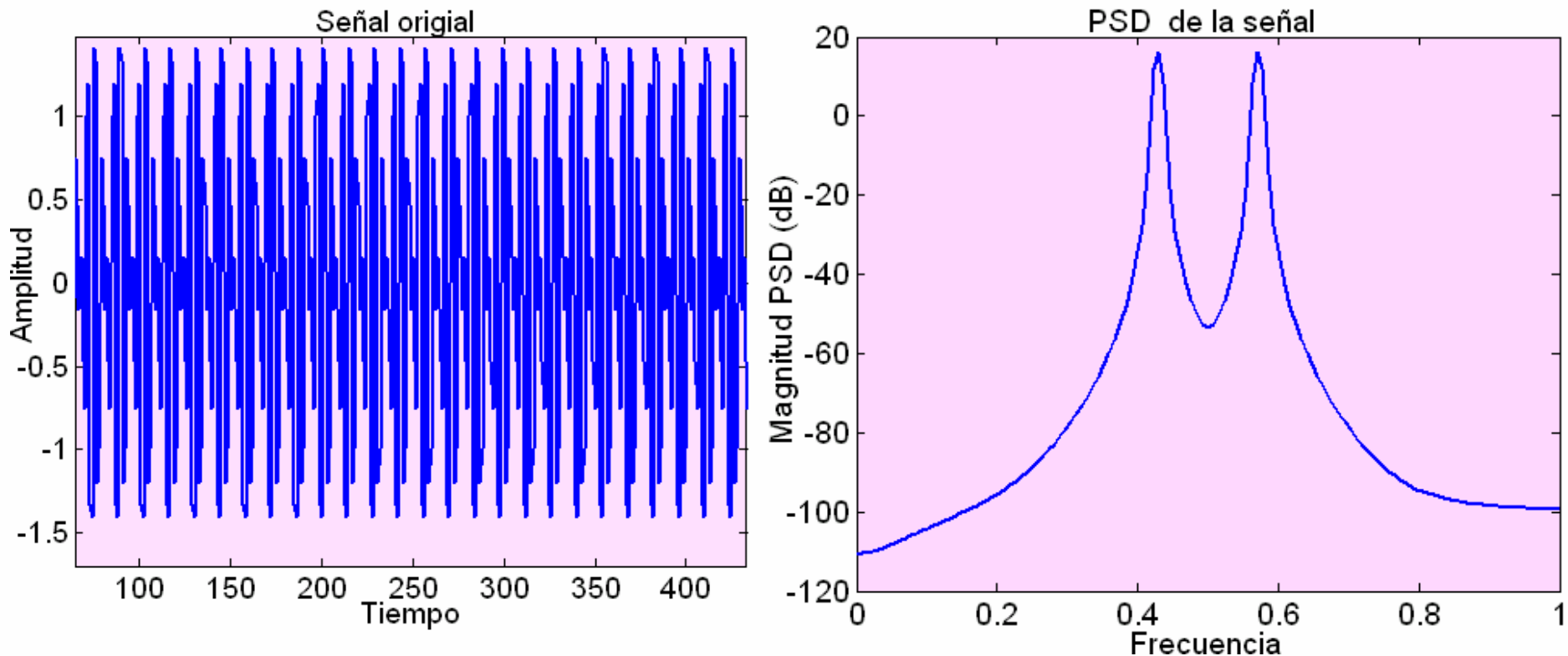
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Conservación de la energía

COMO SE OBTIENE EL ESPECTRO DE FRECUENCIA?

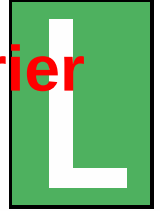


Transformada de Fourier, la cual informa sobre la amplitud del espectro a ciertos valores de frecuencia.



Fs=7000Hz

Condición de existencia de la transformada de Fourier



La señal $x(t)$ tiene transformada de fourier si:

$$X_a = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$
$$|X(f)| < \infty$$

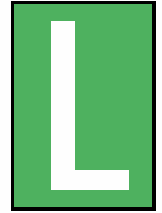
Bases ortonormales:

$$\langle x_c(t), x_b(t) \rangle = 0$$

$$x_c(t) = e^{-j*2*\pi*f*t}$$

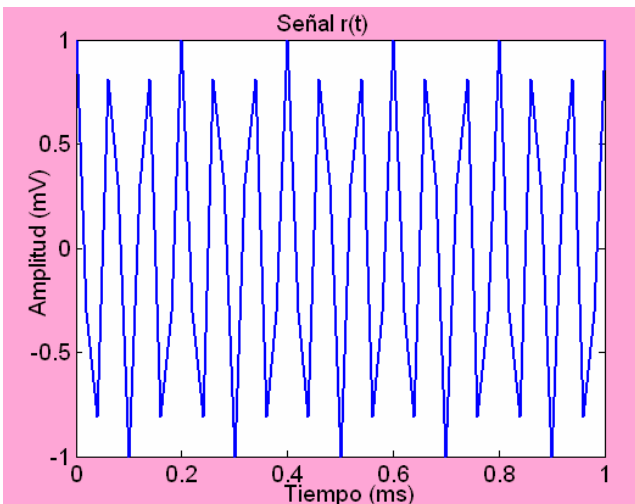
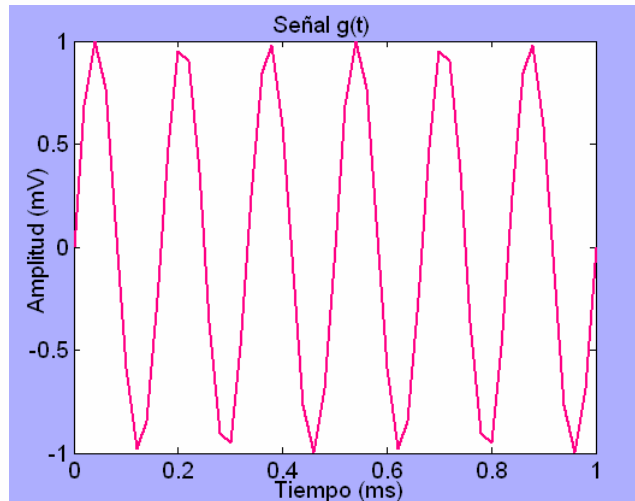
$$|x_c(t)| = 1$$

Propiedades de la transformada de Fourier

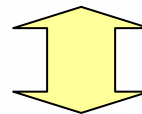


Linealidad y Superposición

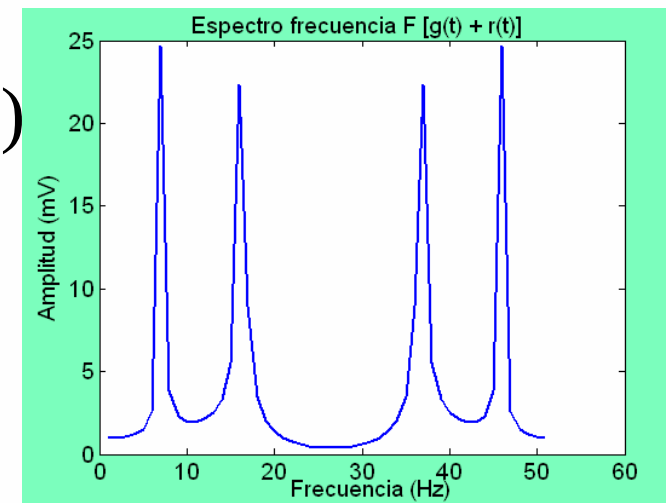
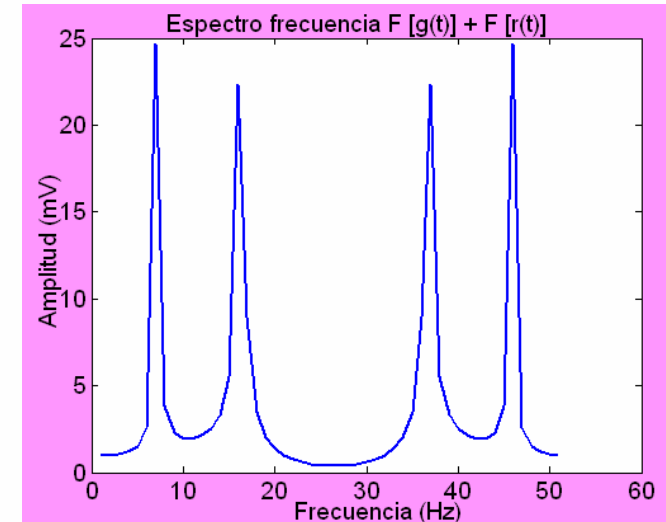
$$\lambda g(t) + \psi h(t) \xrightarrow{\text{TF}} \lambda G(f) + \psi H(f)$$



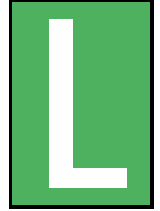
$$F(a * g(t) + b * r(t))$$



$$aF(g(t)) + bF(r(t))$$

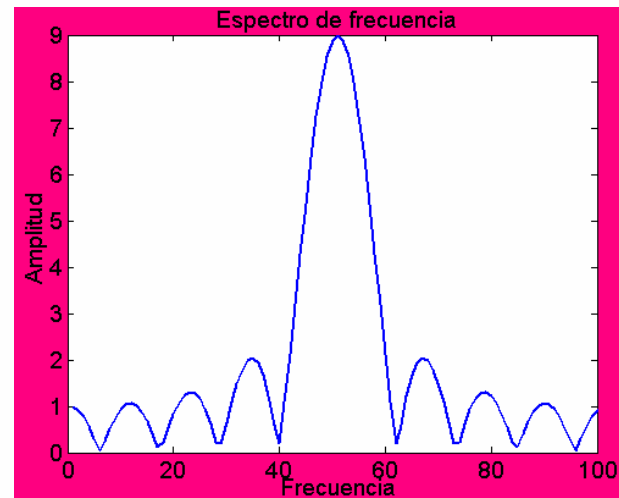
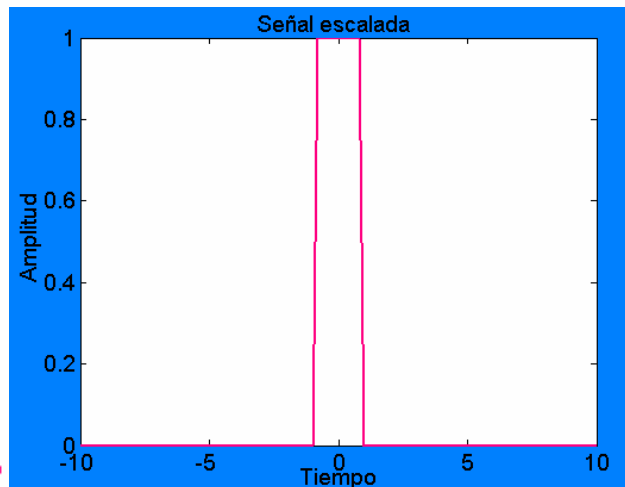
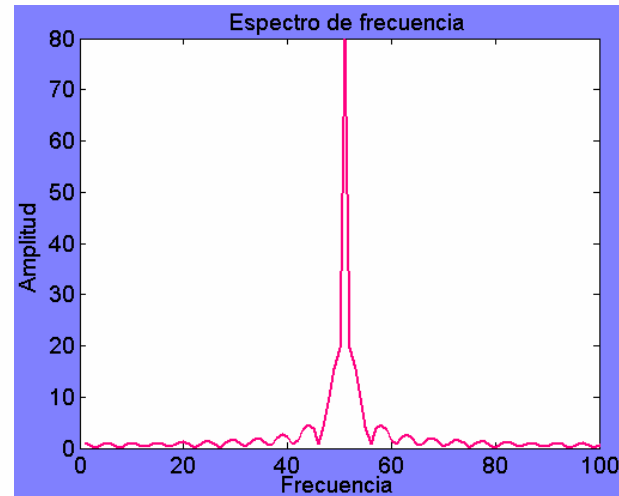
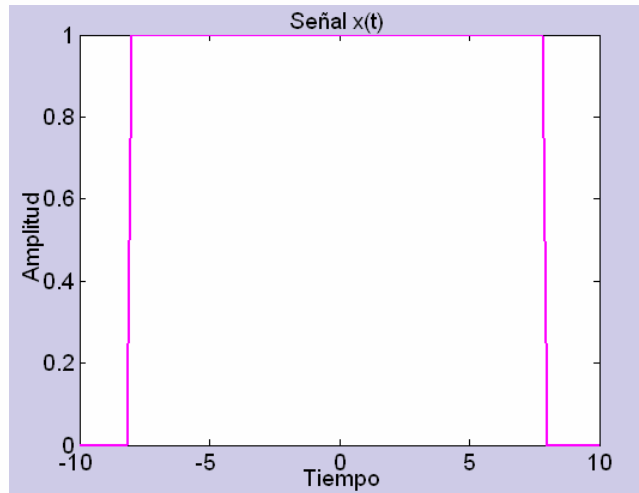


Propiedades de la transformada de Fourier

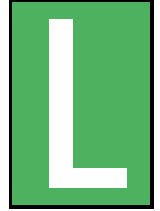


Cambio de escala

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \quad x(rt) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|r|} X\left[\frac{f}{r}\right]$$



Propiedades de la transformada de Fourier



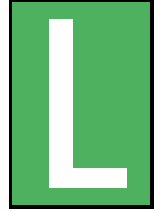
Diferenciación en el tiempo

$$F\left[\frac{d^n(r(t))}{dt^n}\right] = (j \cdot w)^n * F(r(t))$$

Diferenciación en frecuencia

$$F[(j \cdot t)^n * r(t)] = \frac{d^n F(w)}{dw^n}$$

Propiedades de la transformada de Fourier



Integración en el tiempo

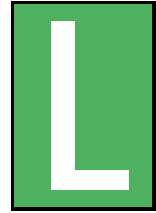
$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)$$

Y

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$$

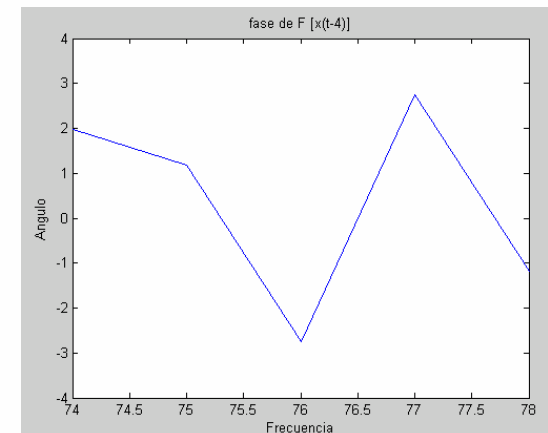
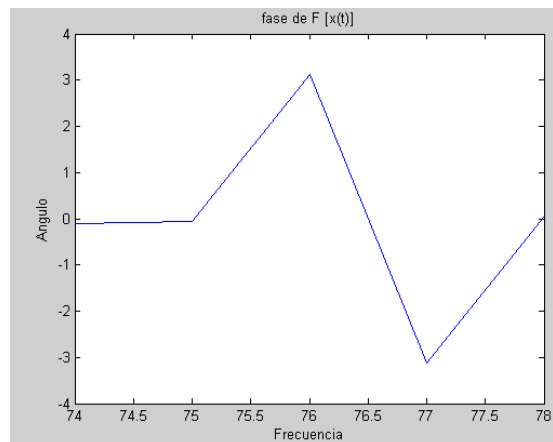
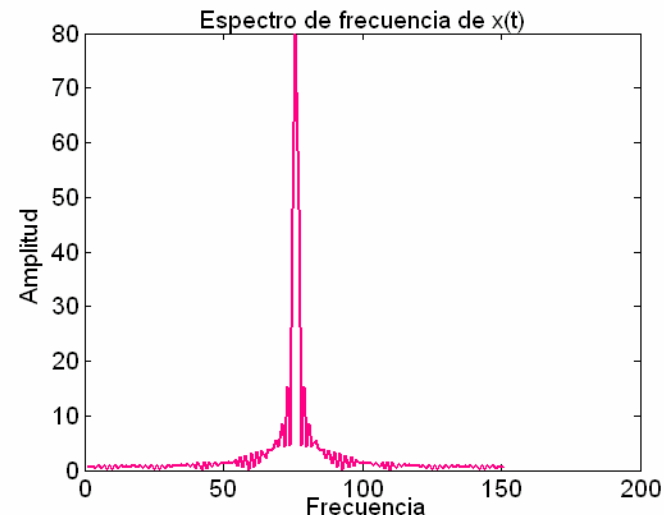
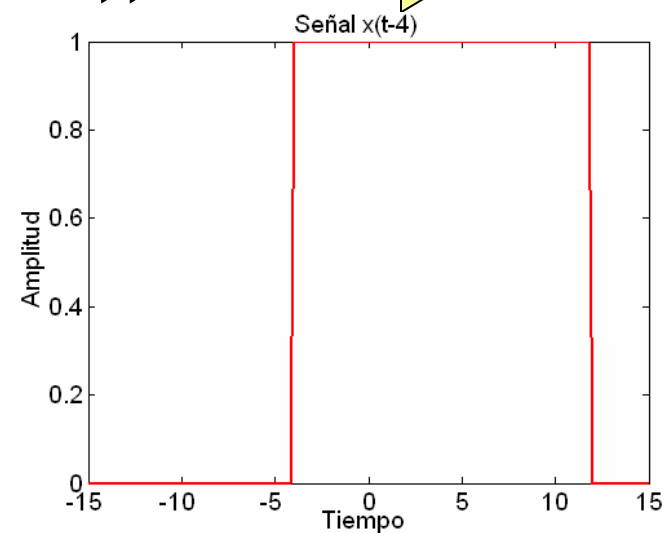
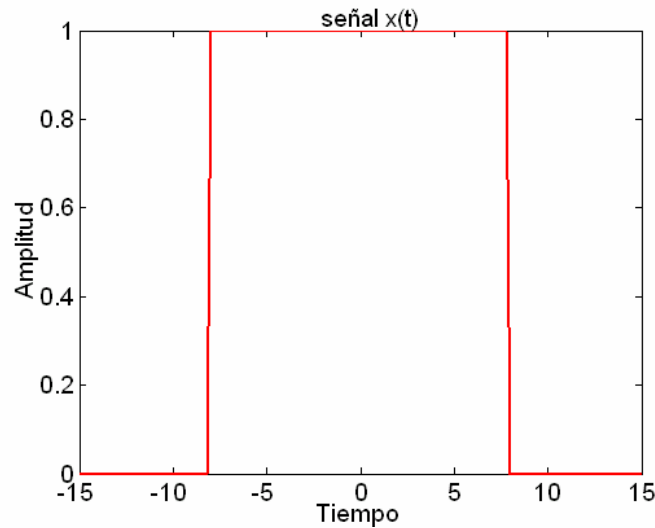
$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \xrightarrow{\text{TF}} \frac{X(f)}{j\omega}$$

Propiedades de la transformada de Fourier



Desplazamiento en el tiempo

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \quad f(x(t - \kappa)) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) * e^{-j\omega\kappa}$$



Propiedades de la transformada de Fourier



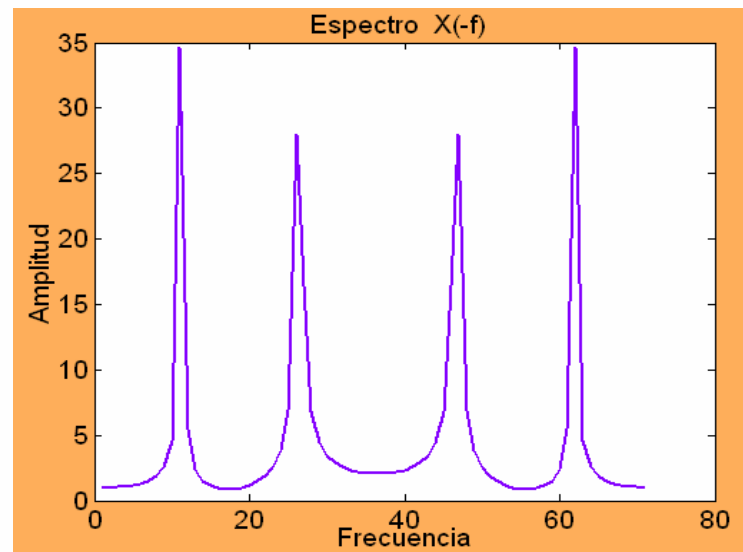
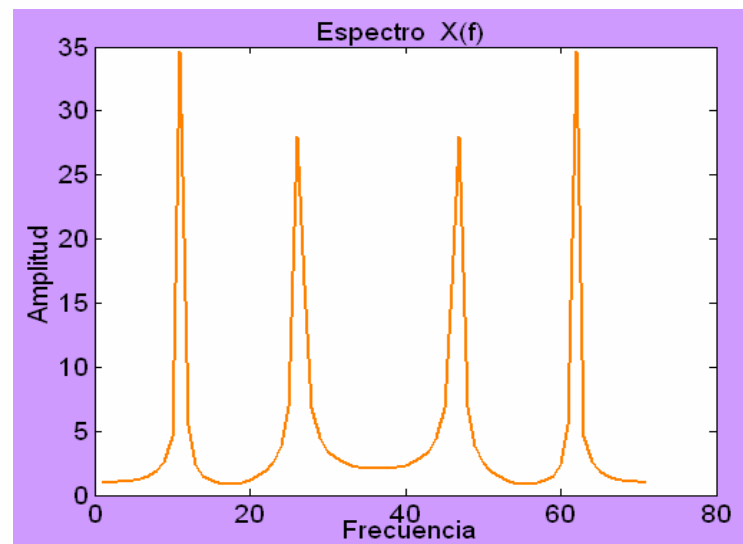
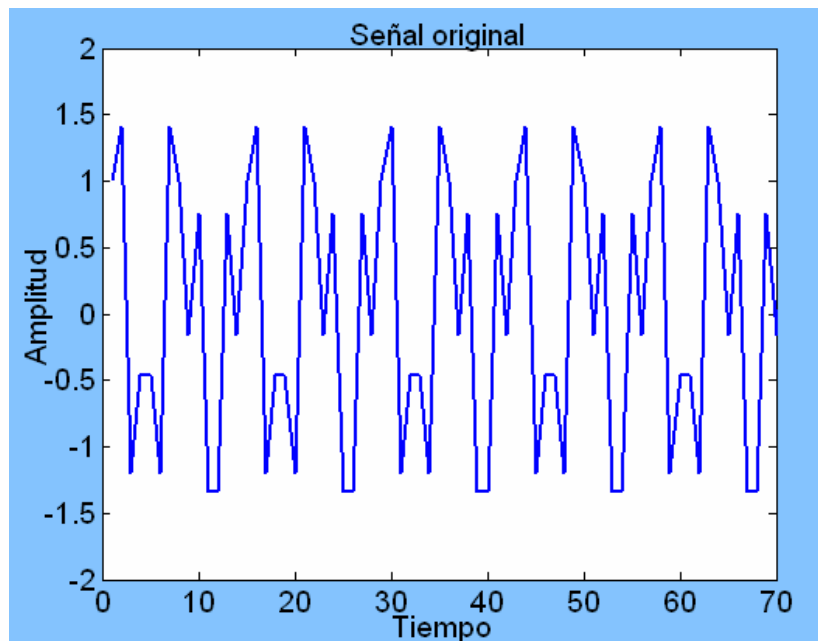
Simetría $X(t)$ $\xrightarrow{\text{TF}}$ $X(f)$

$$|X(f)| = |X(-f)|$$

Simetría par

$$\theta(X(-f)) = -\theta(X(f))$$

Simetría impar

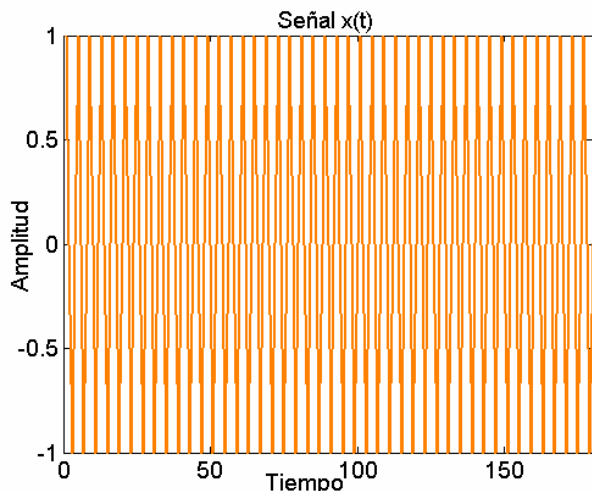


Propiedades de la transformada de Fourier

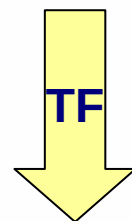


Desplazamiento en frecuencia o modulación

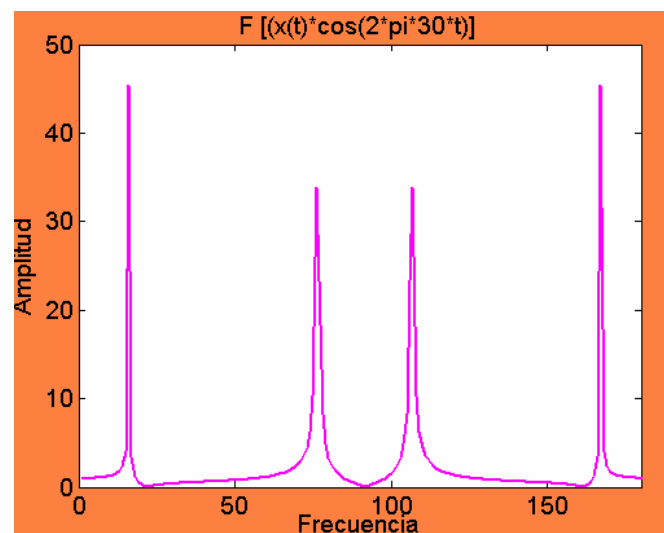
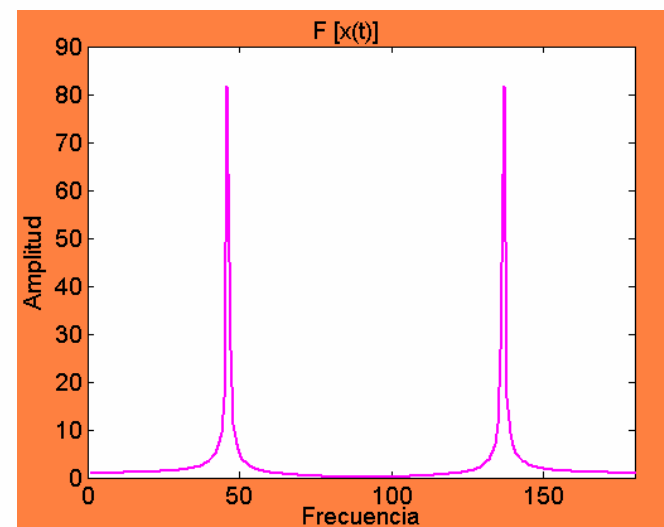
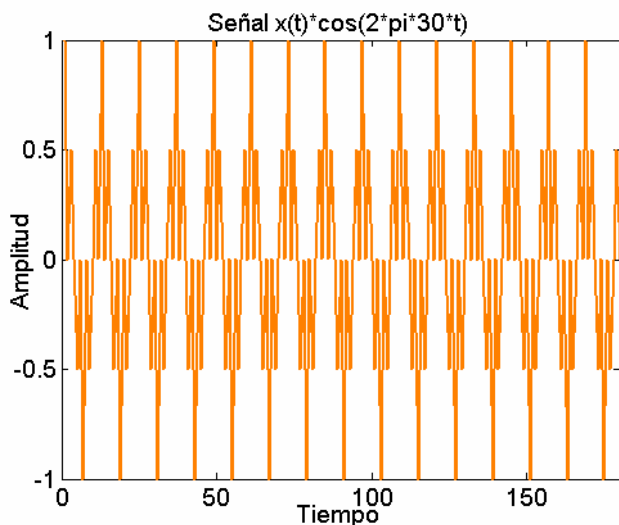
$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)$$



$$x(t) * e^{j*(\omega - \omega_c)*t}$$



$$X(f - f_c)$$



Propiedades de la transformada de Fourier



Convolución

$$x(t)$$



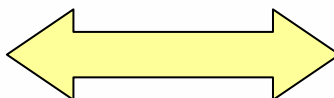
$$X(f)$$

$$g(t) \bullet h(t)$$



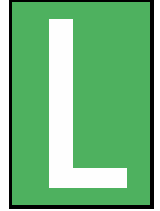
$$G(f) * H(f)$$

$$F(g(t) \bullet r(t))$$



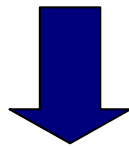
$$F(g(t)) * F(r(t))$$

Clases de transformada de Fourier



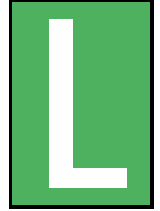
Transformada de fourier en tiempo continuo TFC

Transformada de fourier en tiempo discreto TFTD

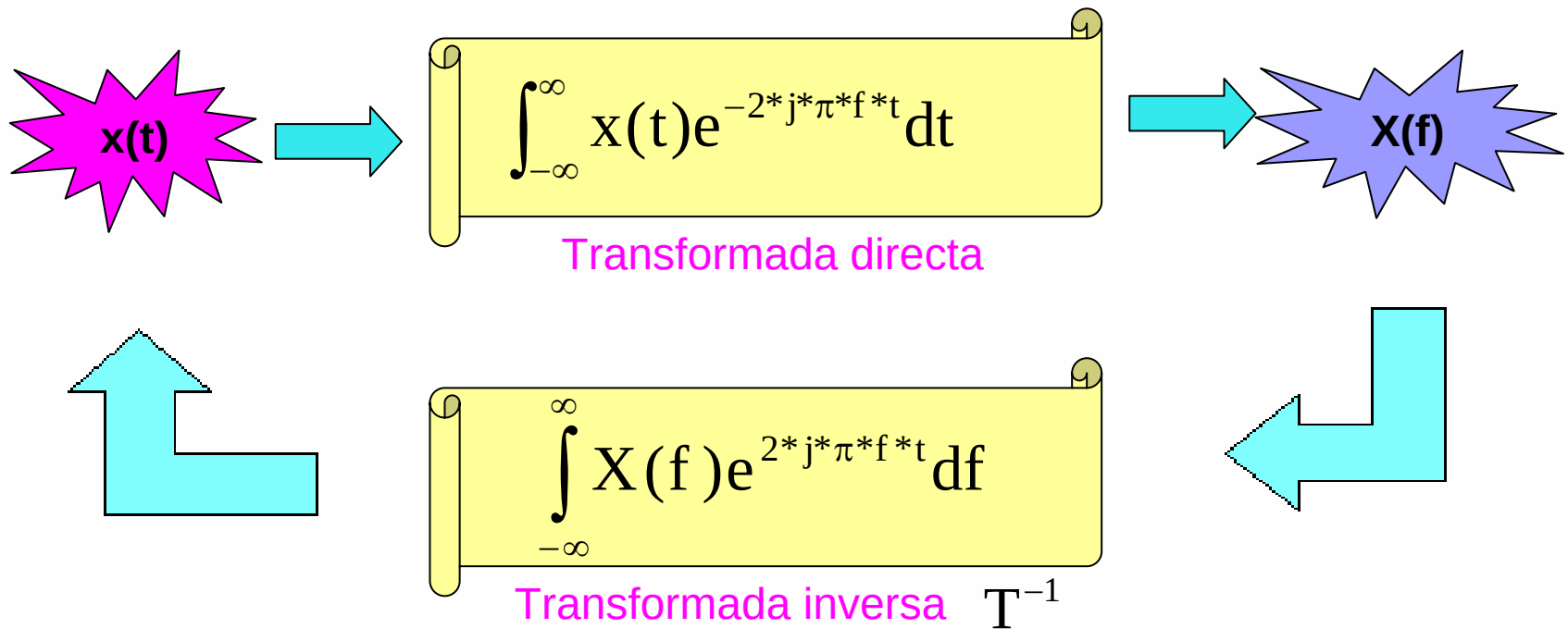


Transformada de fourier discreta TFD

Transformada de Fourier continua TFC.

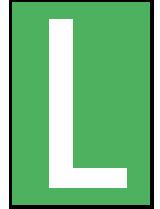


Representación de la señal original en función de sumas de exponenciales complejas, donde f es la frecuencia real.



$X(f)$ es una función compleja

Transformada de Fourier continua TFC.



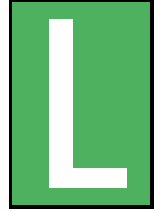
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * e^{-j*2*\pi*f*t} dt$$

La señal $x(t)$ es multiplicada por un termino sinusoidal de frecuencia f , si la señal tiene una componente de frecuencia igual o cercana a f , entonces la integral del producto dará un valor grande.

Si el valor de la integral del producto es pequeño se dice que la señal no contiene frecuencias de valor f .

Como el intervalo de integración va desde $[-\infty, \infty]$, no importara el instante en que aparezca la componente de frecuencia f , y no afectará el resultado de la integración.

Transformada de Fourier continua TFC.



$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * e^{-j*2*\pi*f*t} dt$$

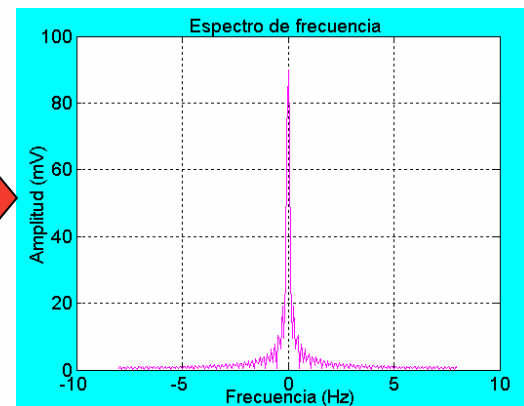
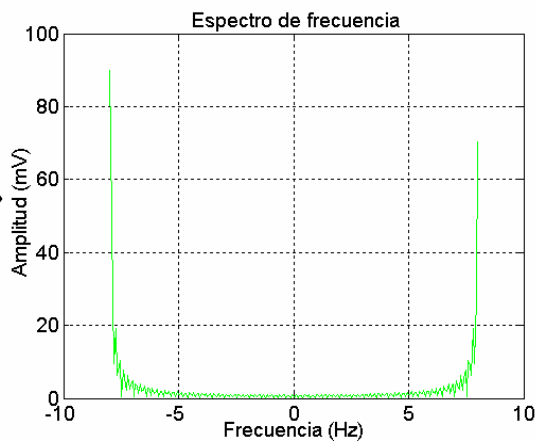
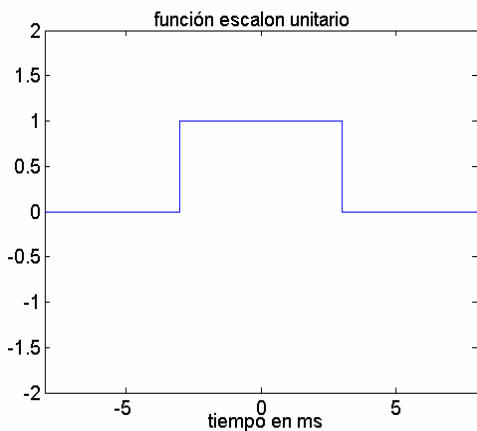
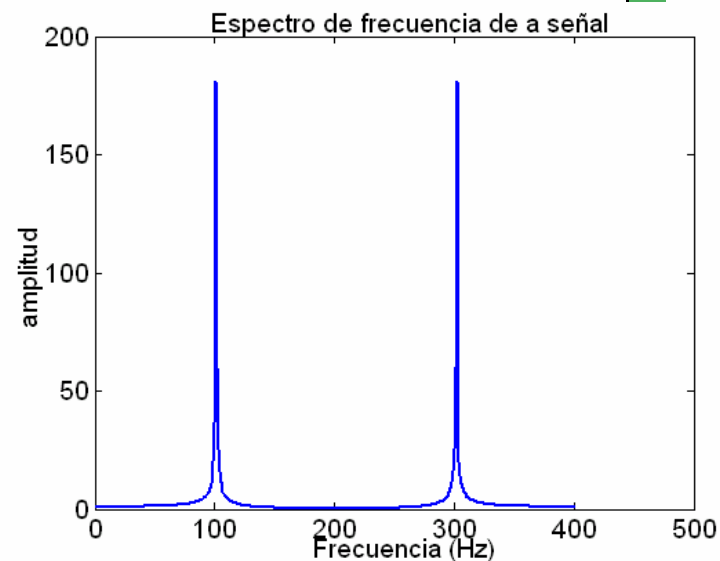
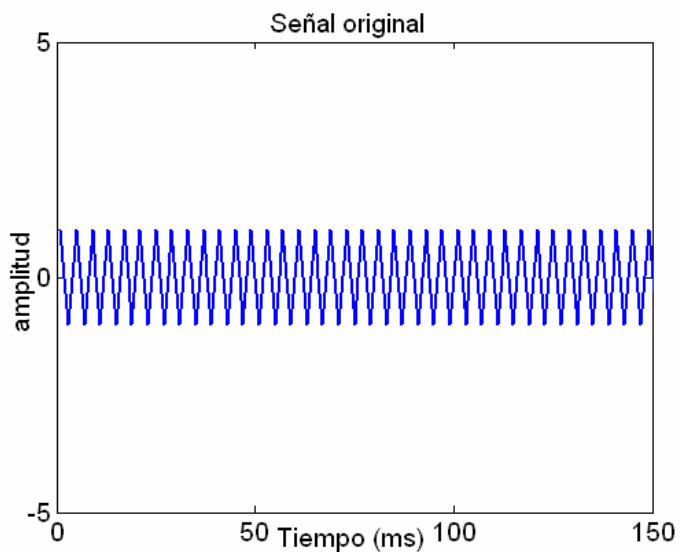
El espectro de una señal $X(f)$, en general esta dado en forma compleja .

$$X(f) = |X(f)| * e^{j\theta(f)}$$

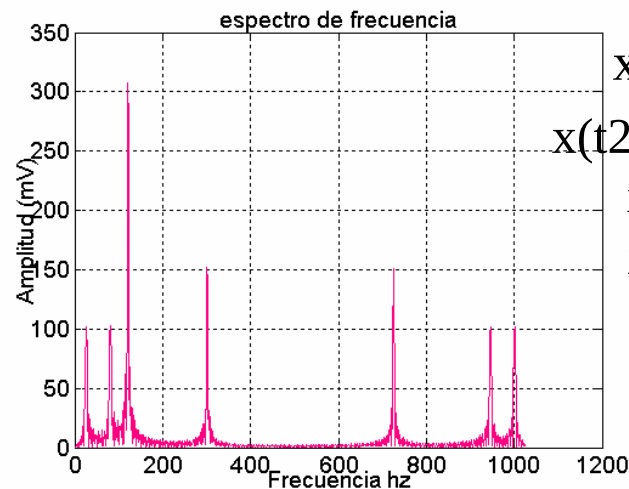
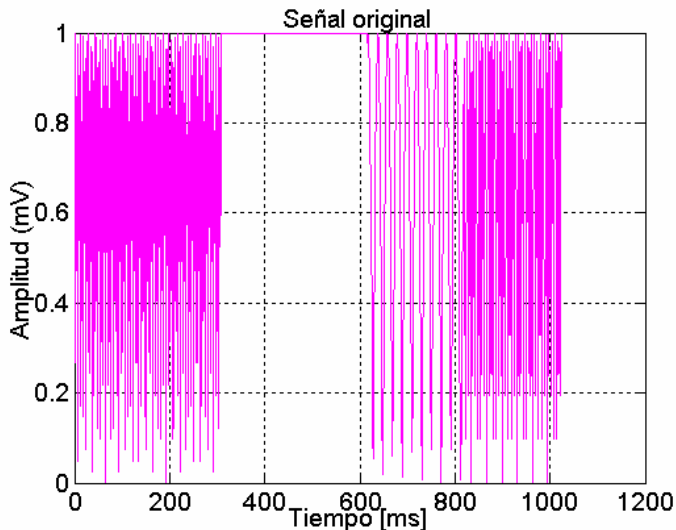
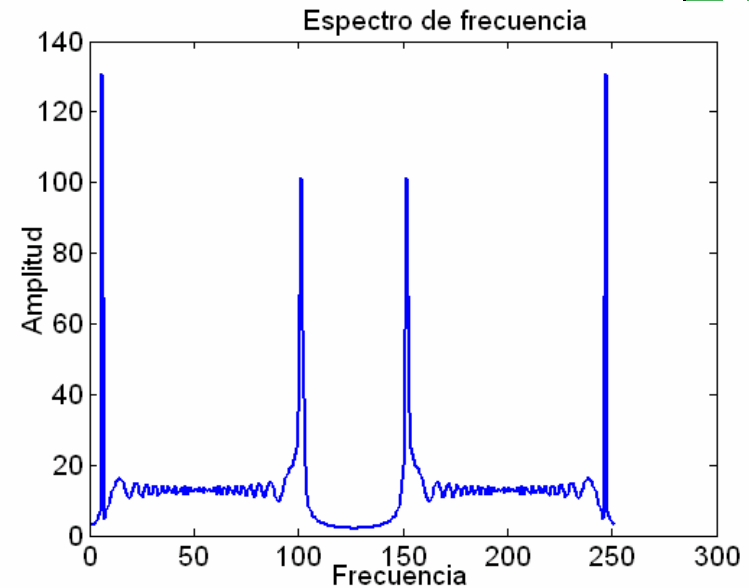
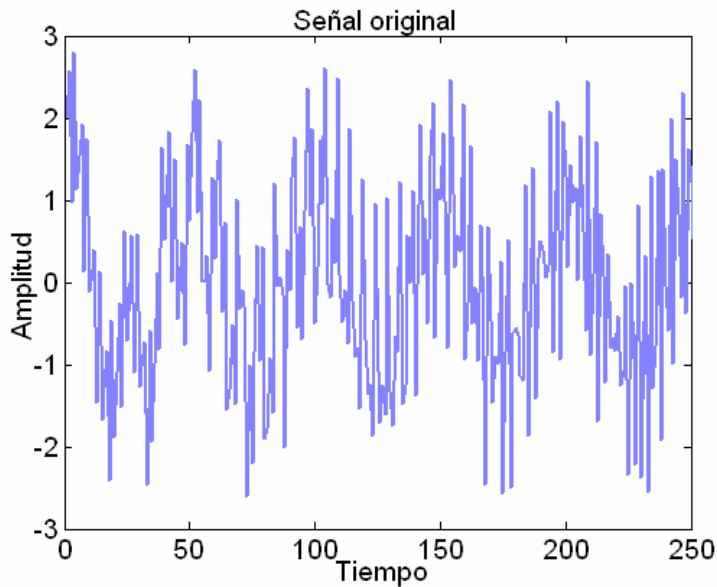
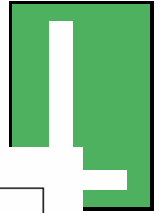
$\theta(X(f))$ **Fase del espectro**

$|X(f)|$ **Magnitud del espectro**

Ejemplos transformada de fourier continua



Ejemplos transformada de Fourier continua



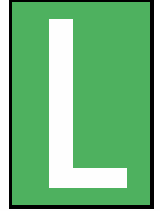
$$x(t1) = \cos(w * 300 * t1)$$

$$x(t2) = \exp(j * 2 * \pi * 120 * t2)$$

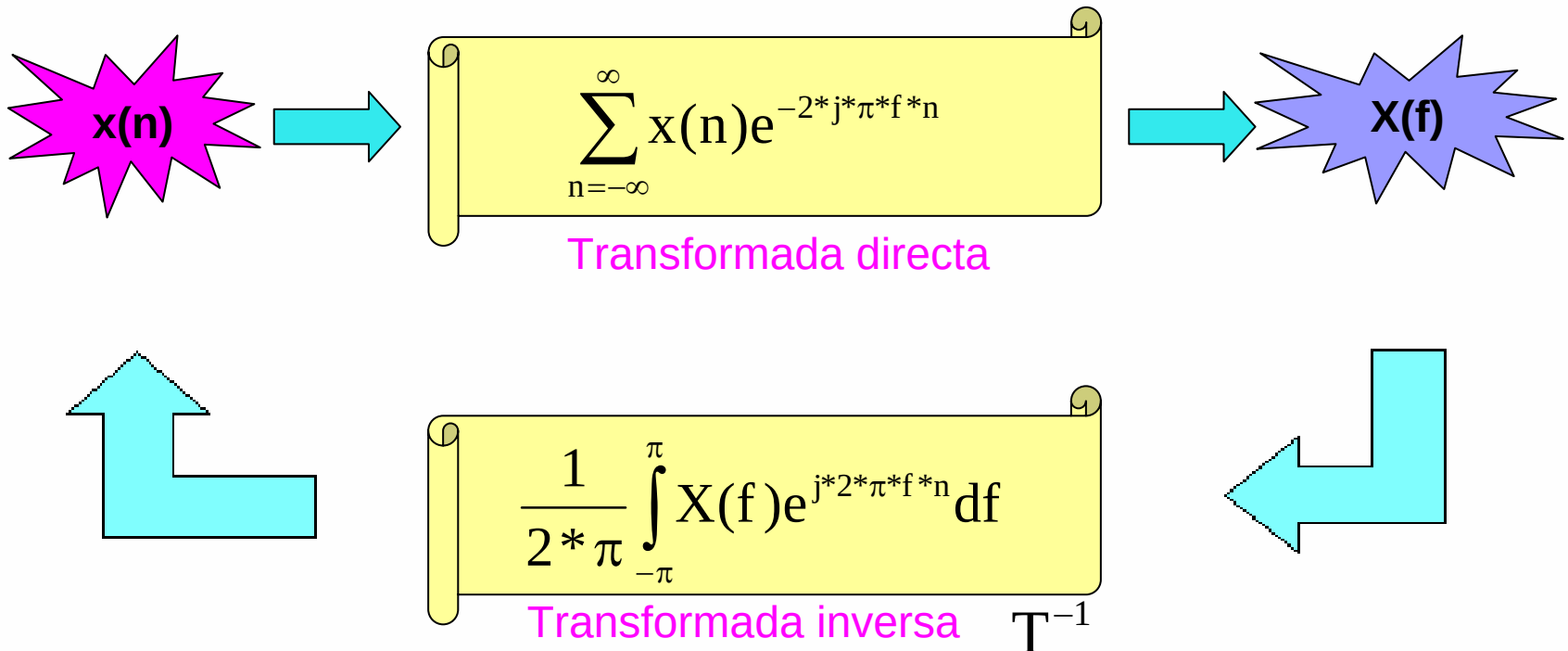
$$x(t3) = \cos(w * 25 * t3)$$

$$x(t4) = \sin(w * 80 * t4)$$

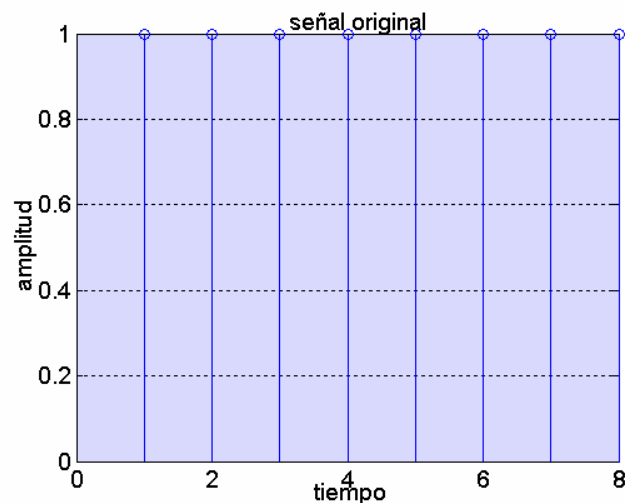
Transformada de fourier en tiempo discreto TFTD.



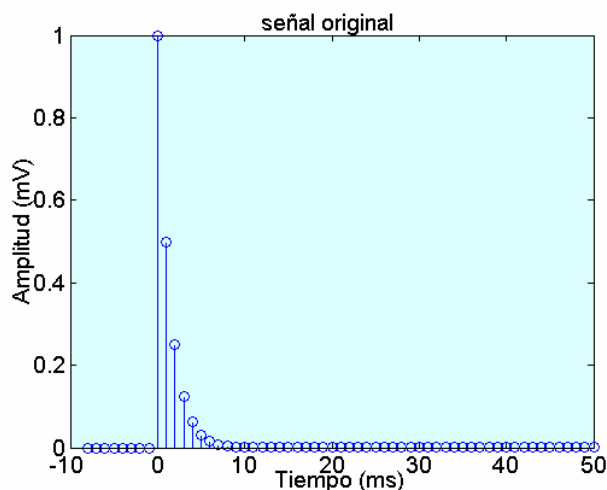
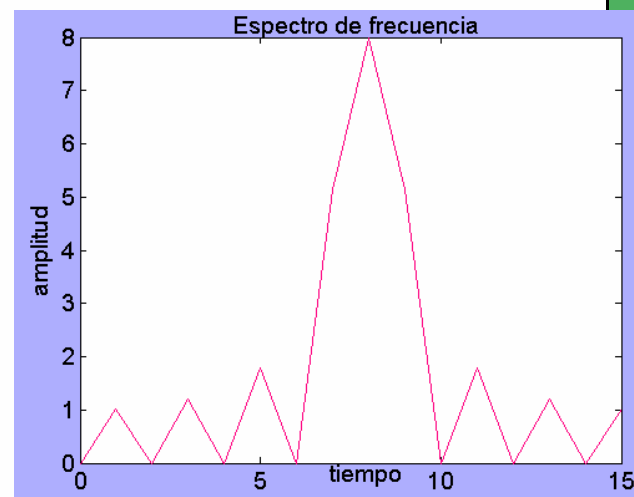
Representación de la secuencia en términos de exponencial complejo



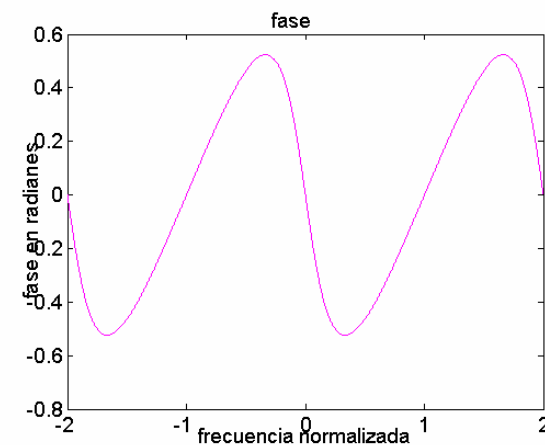
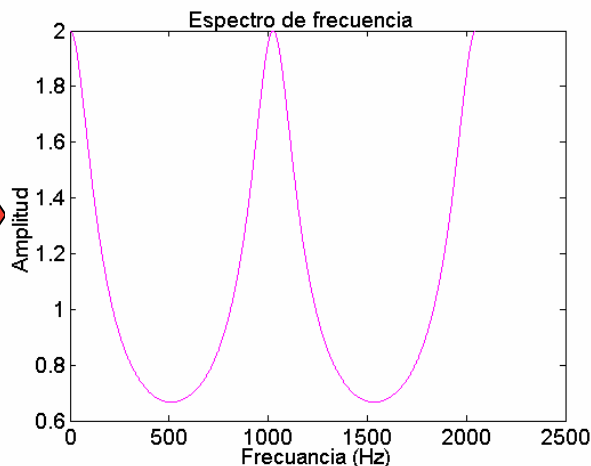
Ejemplos transformada de Fourier en tiempo discreto



DTFT



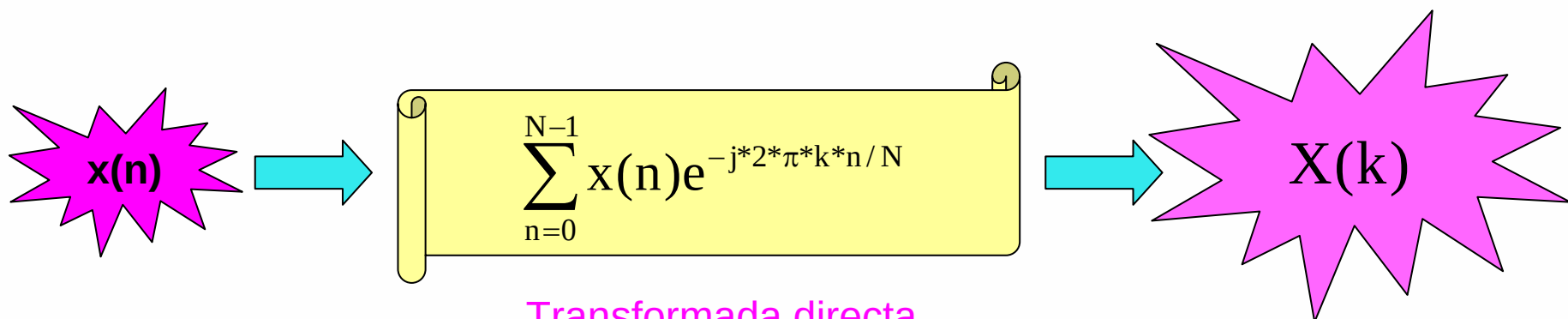
FT



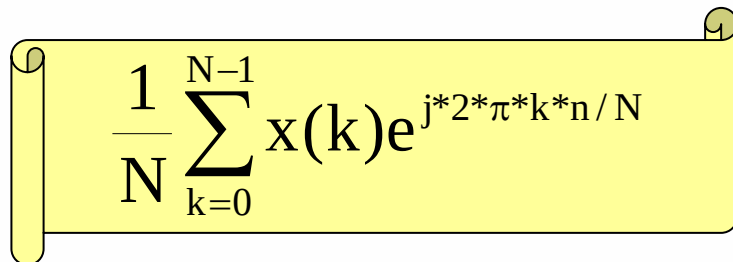
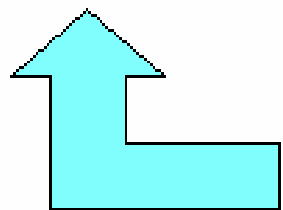
Transformada de fourier discreta TFD.



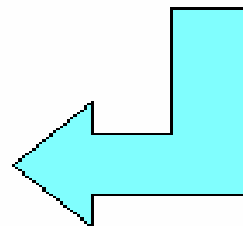
Representación de la secuencia en términos de exponencial complejo



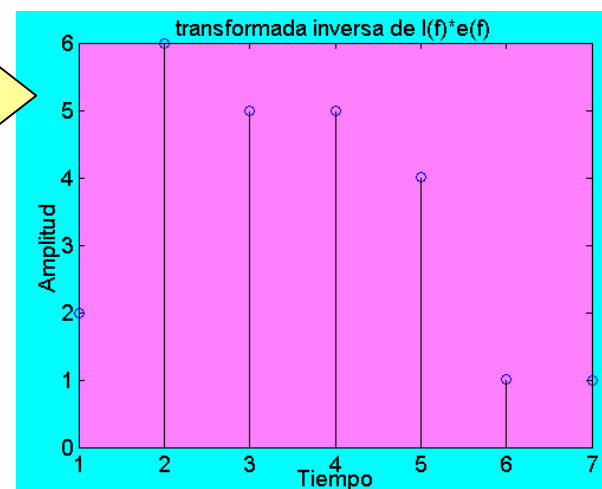
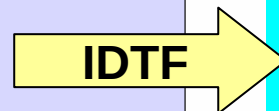
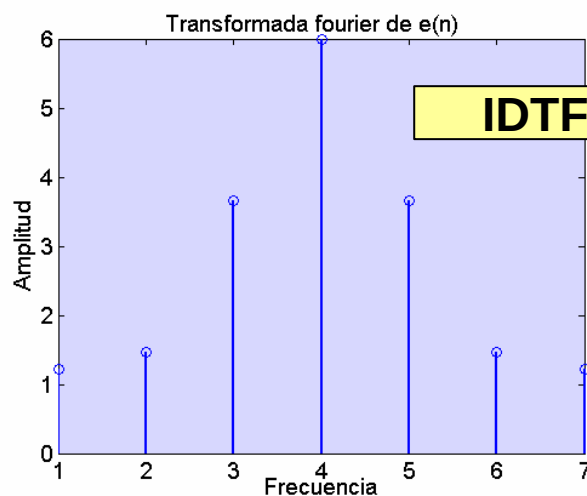
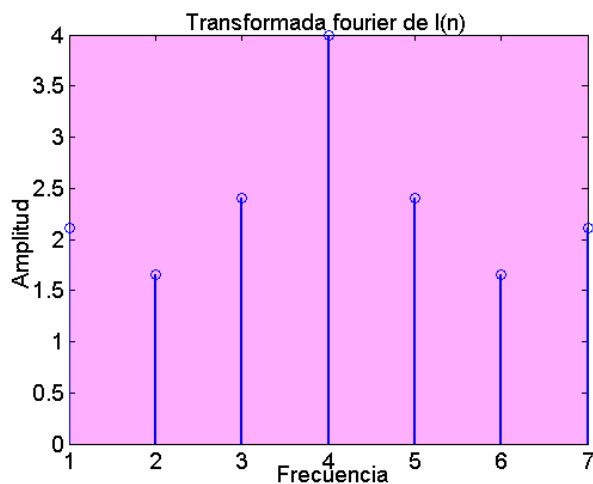
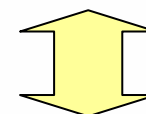
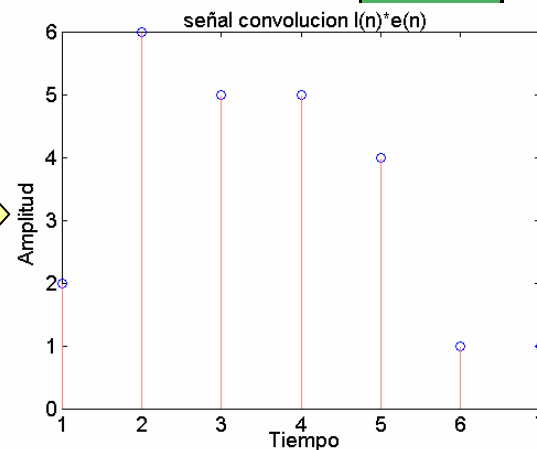
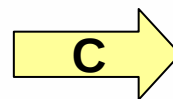
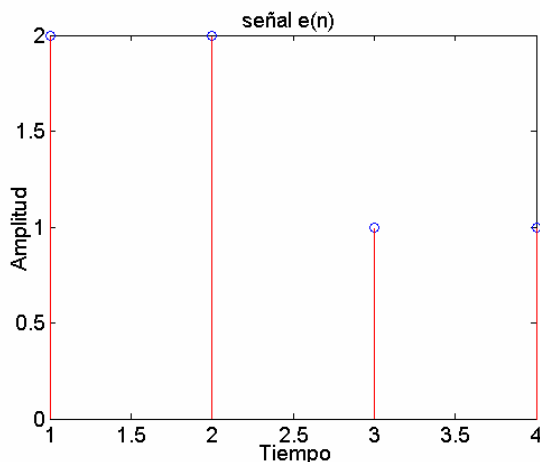
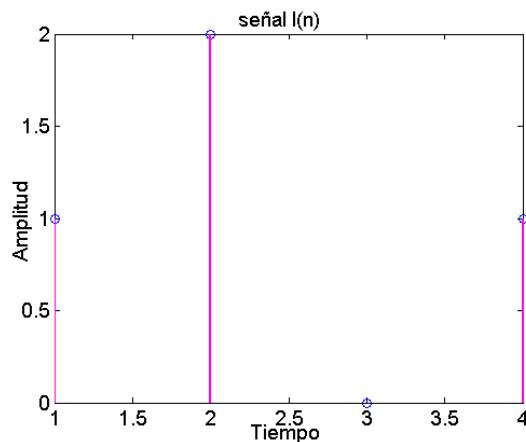
Transformada directa



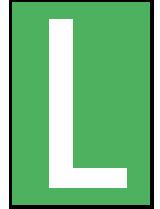
Transformada inversa T^{-1}



Ejemplos transformada de Fourier discreta



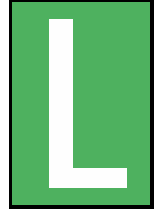
TFC , TFTD y TFD



TFC	TFTD	TFD
Espectro continuo	Espectro continuo	Espectro discreto
Definida entre [-]	Definida entre $[- \pi \pi]$	Definida entre $[- \pi \pi]$

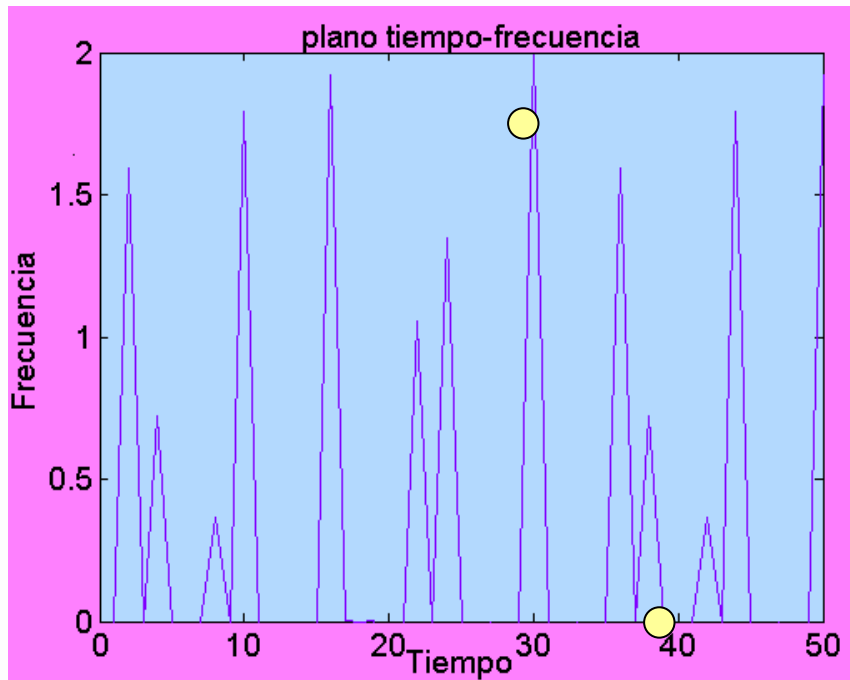
Tabla comparativa

Problemas de la transformada de Fourier

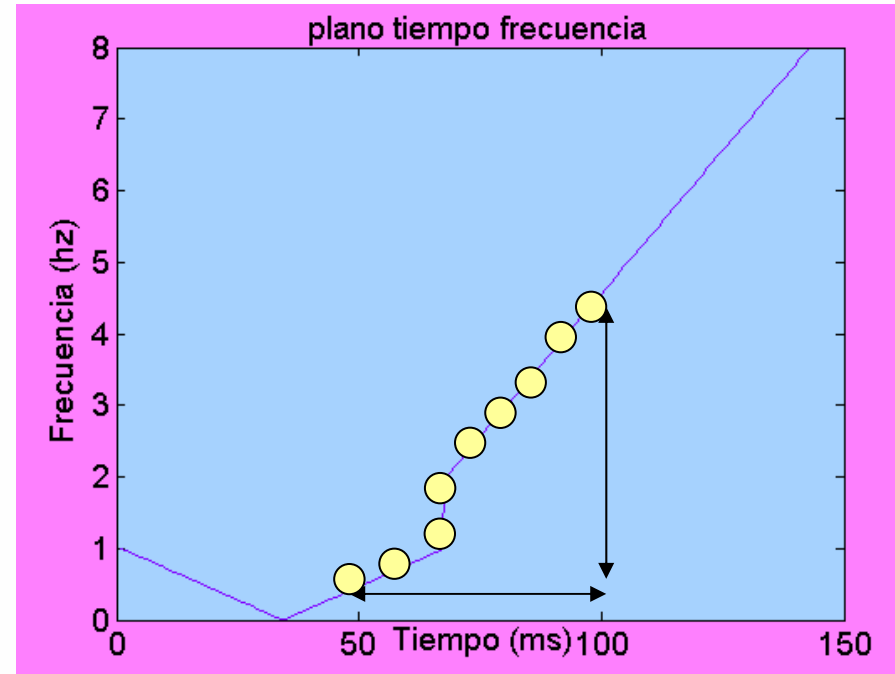


Incertidumbre

Es imposible obtener información del tiempo y frecuencia de una señal en un punto exacto del plano tiempo frecuencia.

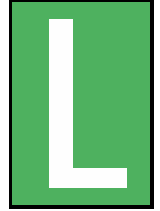


Forma incorrecto



Forma correcto

Problemas de la transformada de Fourier



Incertidumbre

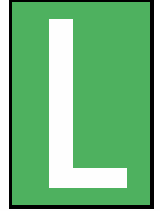
Se concluya que la TF no tiene problemas en el dominio de la frecuencia, se sabe exactamente las frecuencias que existen, de la misma manera no hay ningún inconveniente en el dominio del tiempo, ya que se conocen los valores de la señal en cualquier instante de tiempo.

Lo que proporciona estas resoluciones es la ventana utilizada:

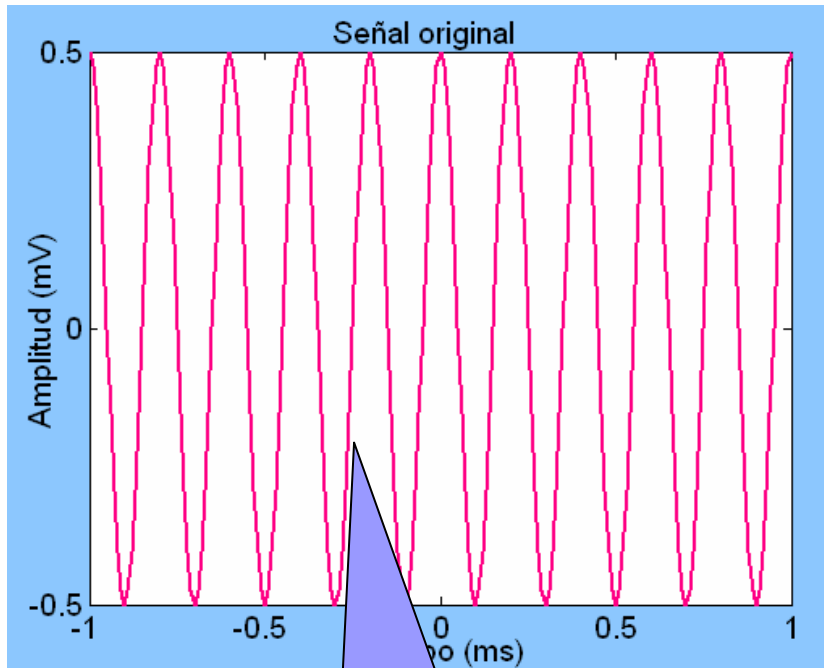
$$e^{j*2*\pi*f*t}$$

La cual existe para cualquier instante de tiempo [-]

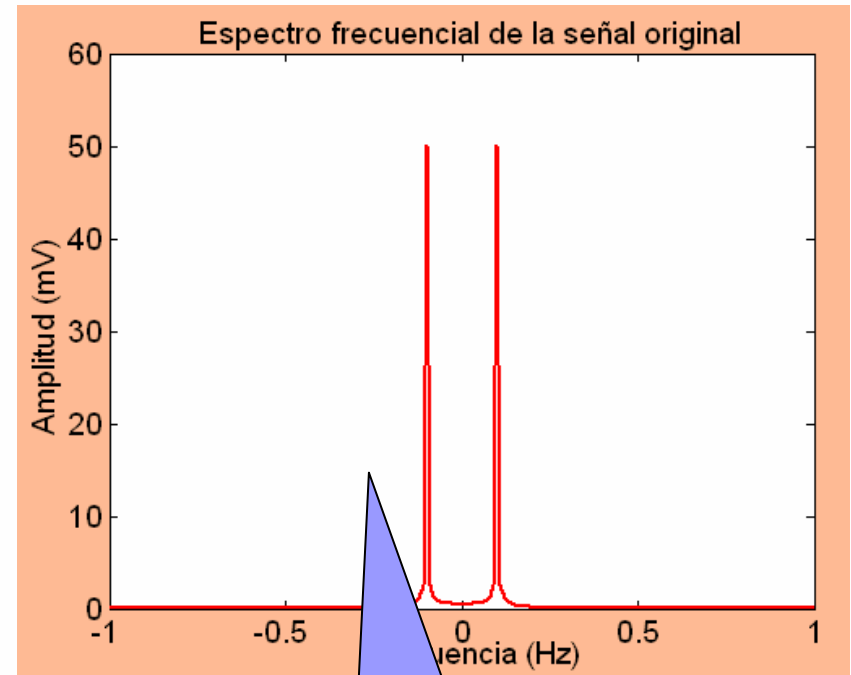
Problemas de la transformada de Fourier



Incertidumbre

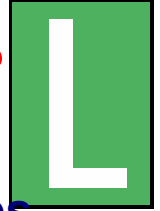


No contiene ninguna
información de
frecuencia



No contiene ninguna
información de
tiempo

Que tanta resolución tiempo frecuencia tiene la TF ?

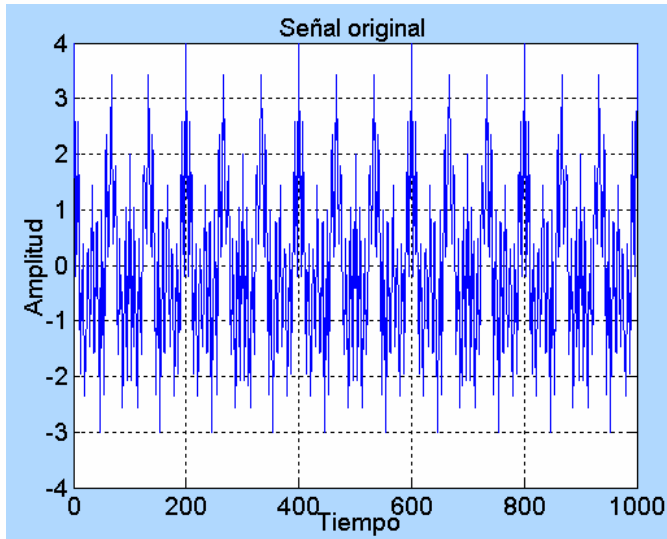


La transformada de fourier solo da el valor(es) de las componentes espectrales que se encuentran en la señal, a dicha transformada no le importa conocer en que tiempo ocurren estas componentes espectrales.

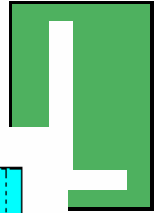
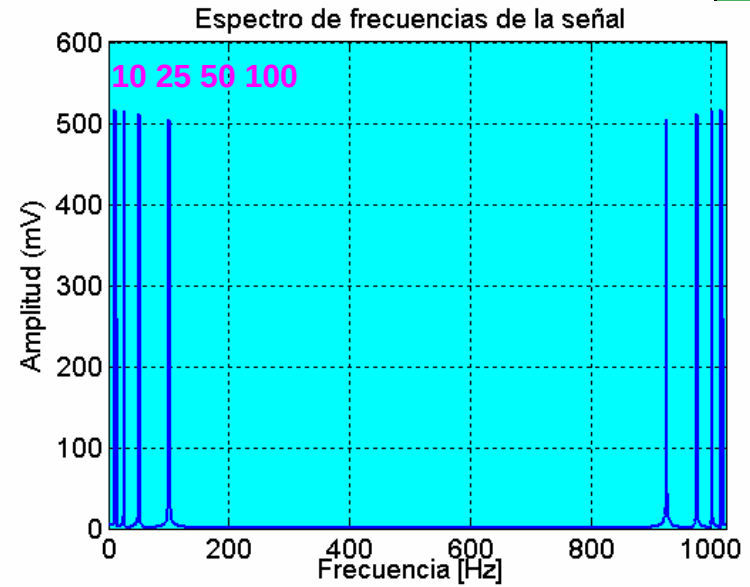
Señales estacionarias: se dice que la resolución tiempo-frecuencia es buena.

Señales no estacionarias: se dice que la resolución tiempo-frecuencia es cero.

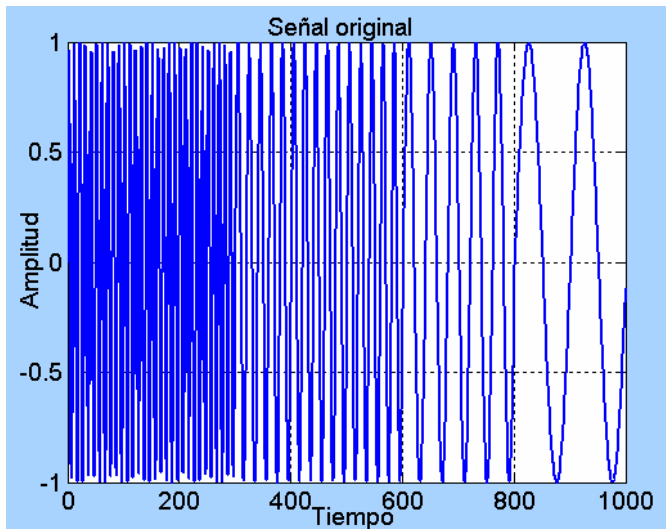
Transformada de fourier (T.F) de señal estacionaria



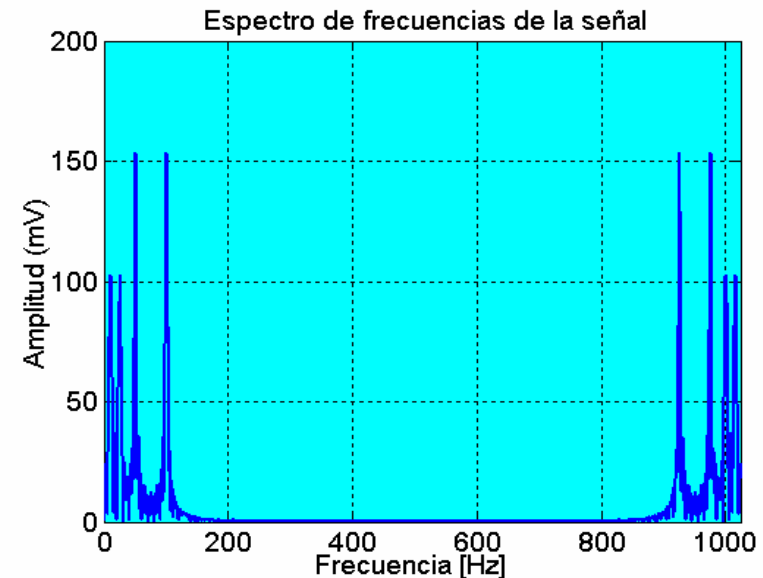
TF



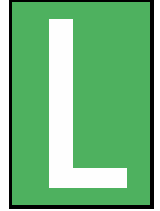
Transformada de fourier (T.F) de señal no estacionaria



TF



¿ Cuando aplicar la T.F. ?



Teniendo en cuenta las definiciones de señal estacionarias, no estacionarias y sus diferentes transformadas, se puede decir que solo es aplicable a **señales estacionarias**, debido a que las componentes espectrales se encuentran en todo momento.

Que pasa con las señales que son no estacionarias ?

La solución fue dividir las señales en porciones finitas y aplicarle la transformada de fourier.

A este proceso se le llamo:

Transformada de fourier en tiempo corto S.T.F.T



Proporciona información de las componentes espectrales y su momento de ocurrencia.

Existe una sola diferencia entre la T.F y la S.T.F.T, en S.T.F.T la señal se divide en segmentos pequeños, en estos segmentos se debe asumir que la señal es estacionaria y en T.F existe un solo segmento infinito.

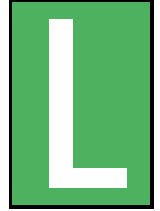
$$\text{tftcc}(t_0, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * v(t - t_0) * e^{-2\pi j f t} dt$$

$$\text{tftcd}(t_0, f) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) * v(n - t_0) * e^{-2\pi j f n}$$

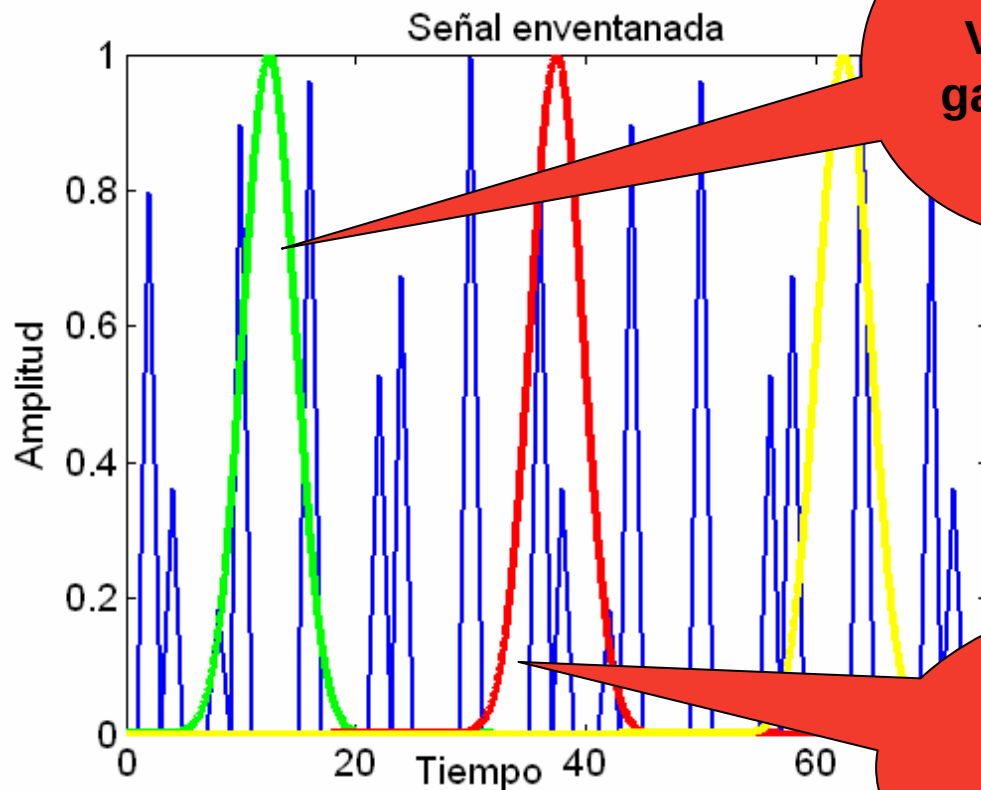
$x(t)$	$x(n)$	Señal original
--------	--------	----------------

$v(t)$	$v(n)$	Función ventana
--------	--------	-----------------

Transformada de fourier en tiempo corto S.T.F.T



Ejemplo



Ventana gaussiana

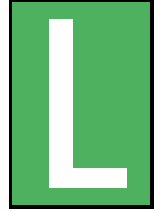
$$x(t) = e^{-a*t^2/2}$$

a es la longitud de la ventana.

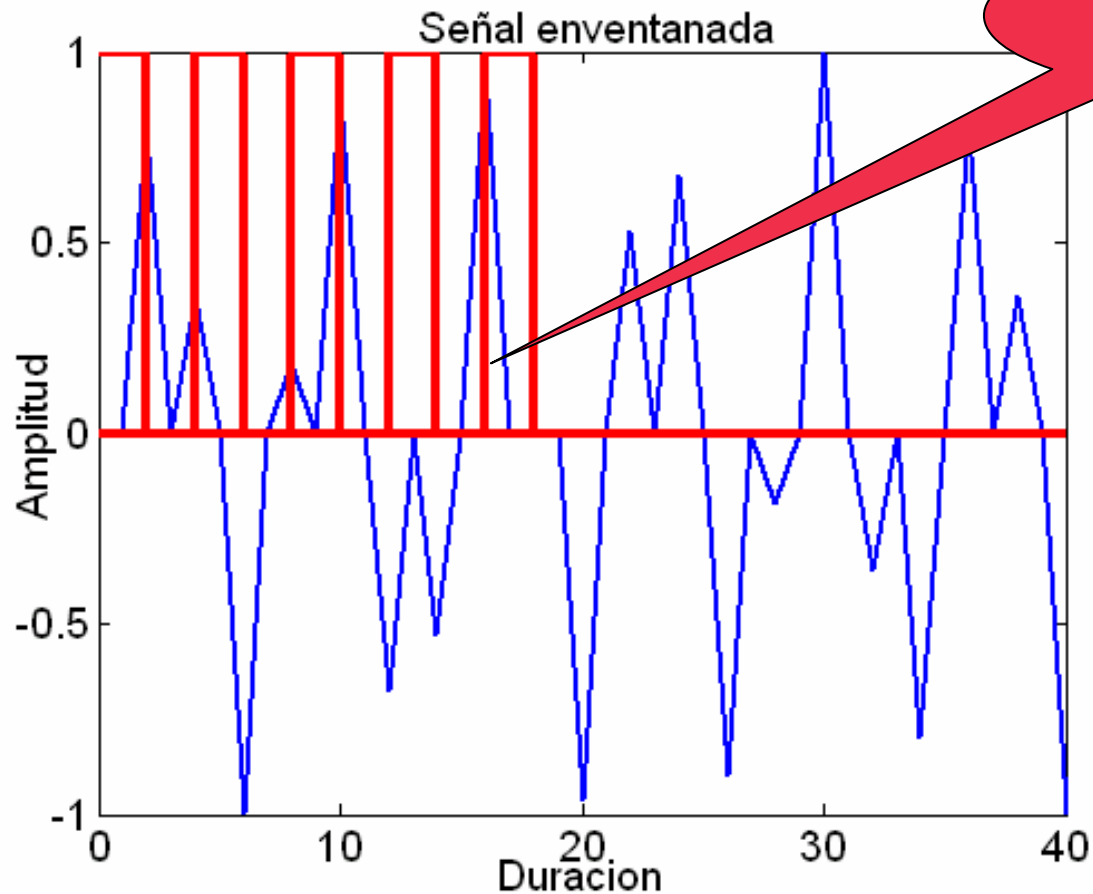
Se supone que la porción de señal dentro de la ventana debe ser estacionaria.

Explicación gráfica

Transformada de fourier en tiempo corto S.T.F.T



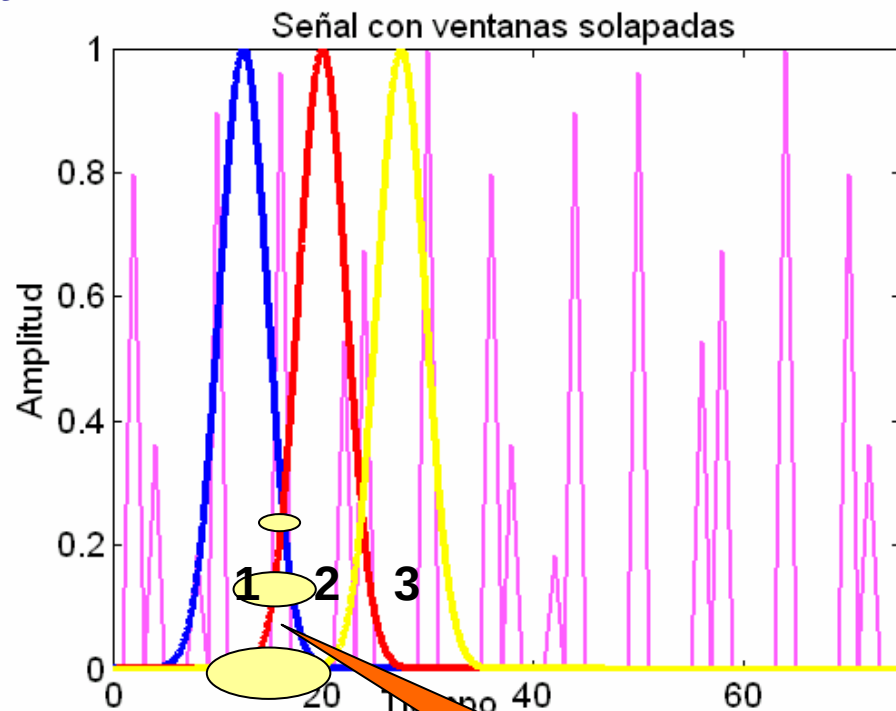
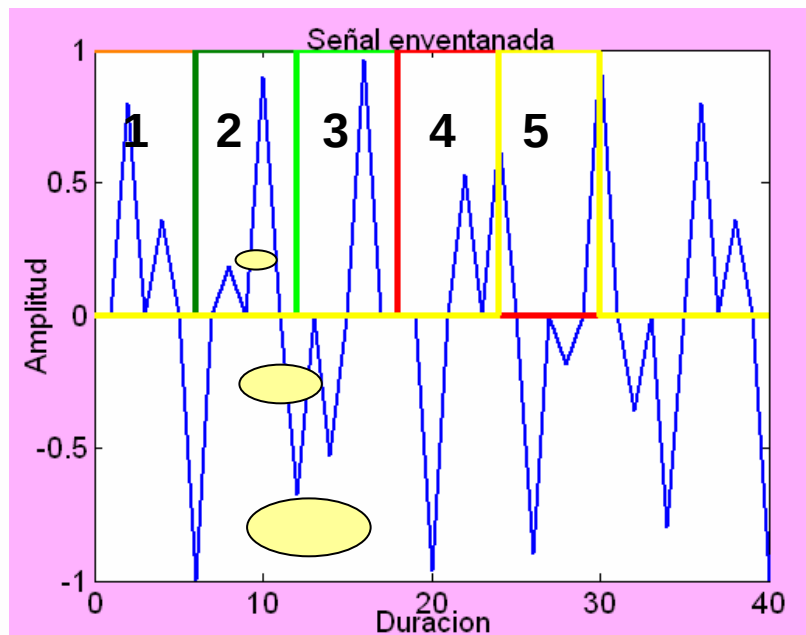
Ejemplo



Transformada de fourier en tiempo corto S.T.F.T



Desplazamiento de la ventana



**Desplazamiento
periódico con periodo
igual a la duración del
la ventana**

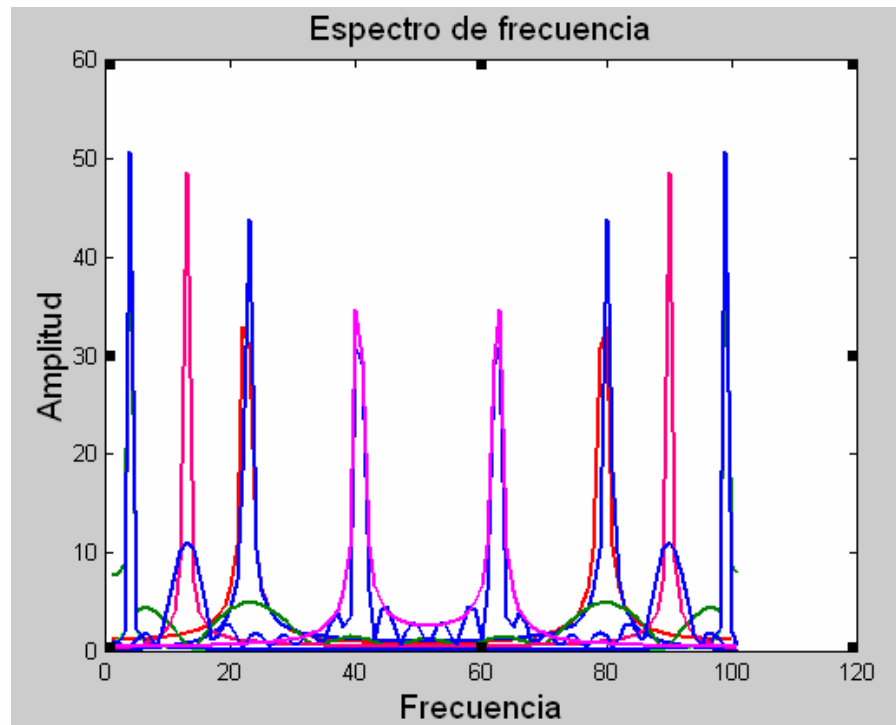
**Desplazamiento
periódico con periodo
menor a la duración
del la ventana**

Solapamiento

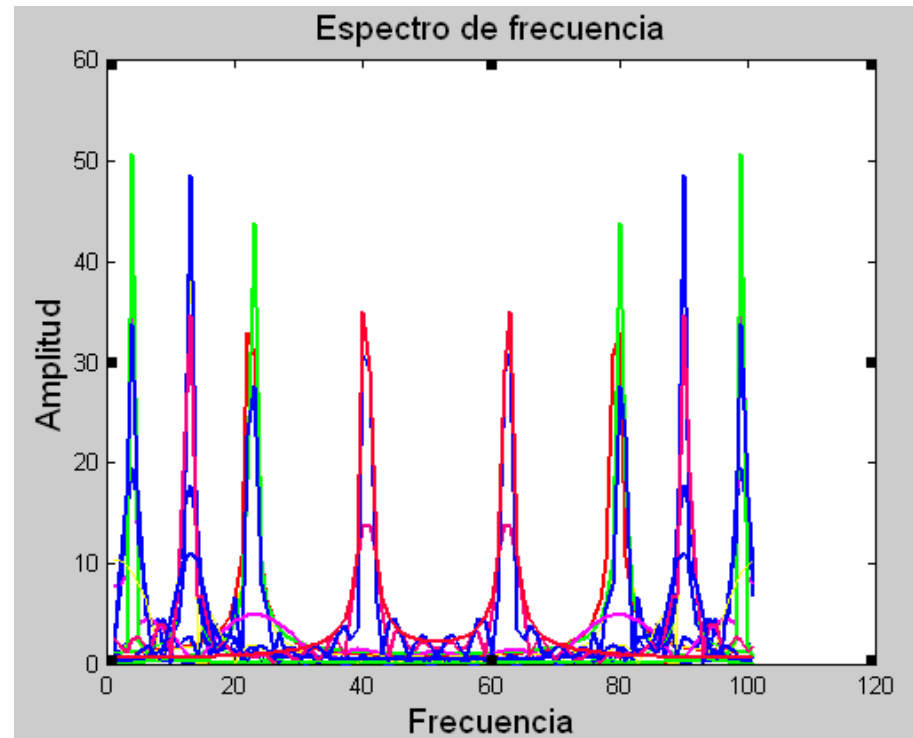
Transformada de fourier en tiempo corto S.T.F.T



Desplazamiento de la ventana



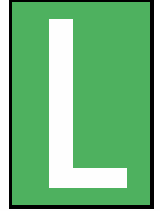
Espectros de la señal no solapada



Espectros de la señal solapada

Mayor cantidad de espectros de frecuencias con ventanas solapadas.

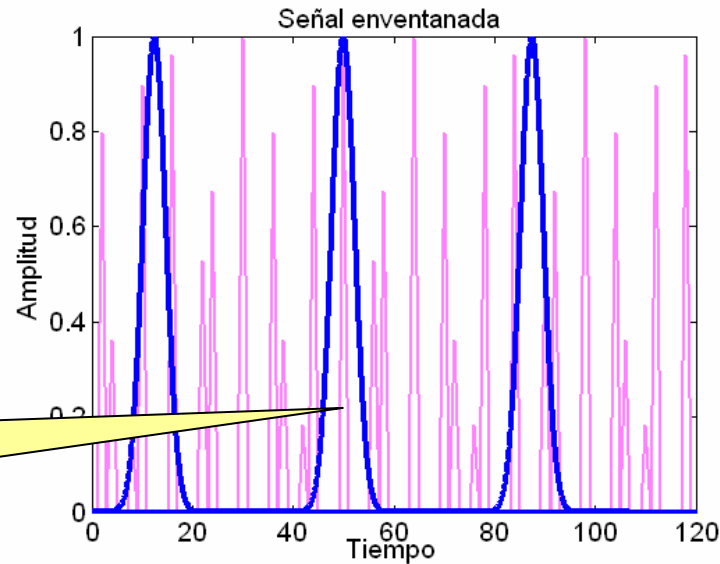
Transformada de fourier en tiempo corto S.T.F.T



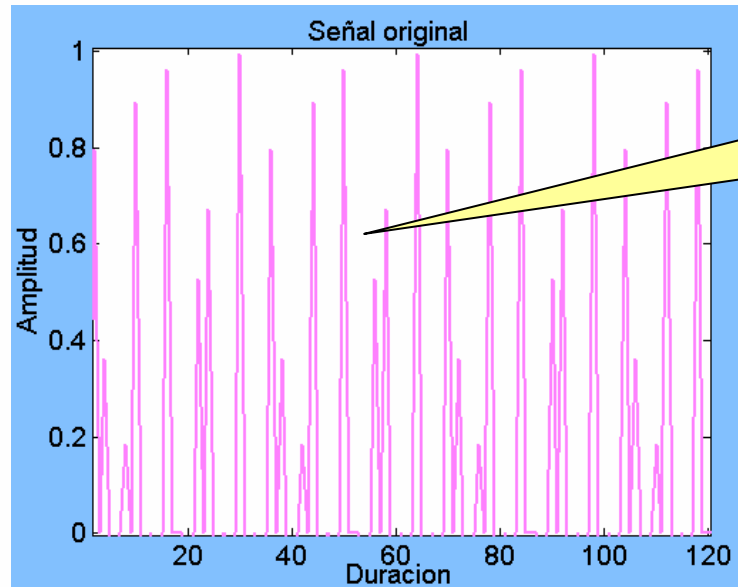
Variación del enventanado:

Variación del ancho de la ventana

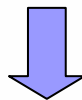
si el ancho de la ventana va hacia el infinito



Que sucede?



Señal no estacionaria

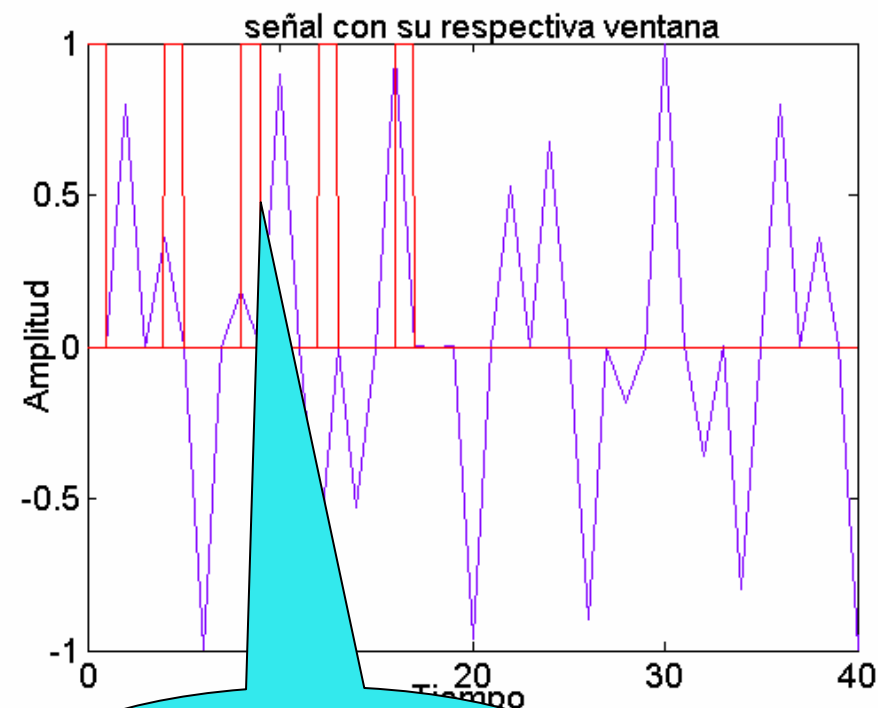


TF

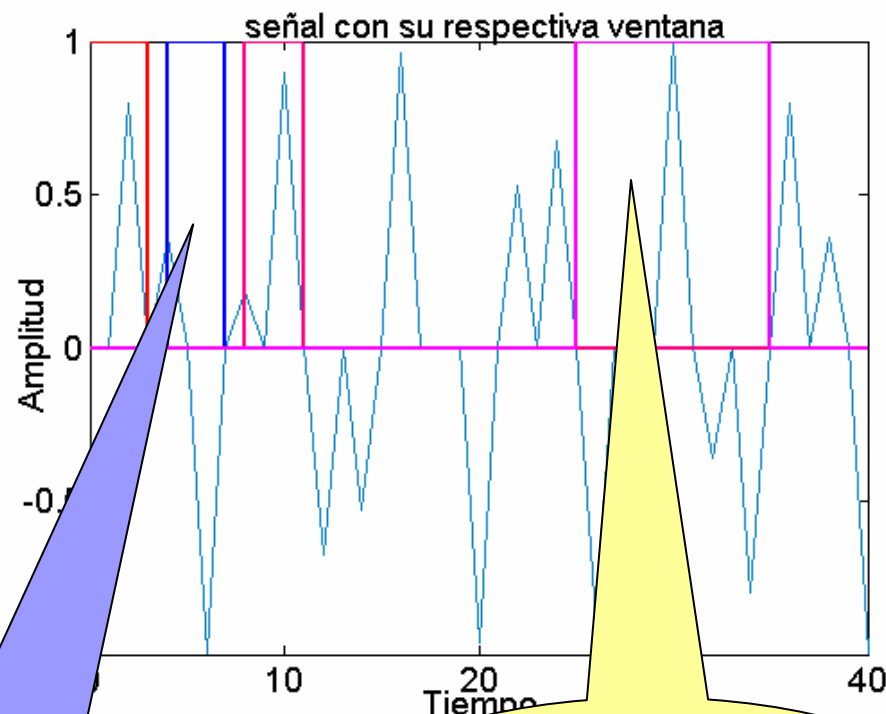
Problemas de la STFT



Resolución: principio de incertidumbre (**ventana**).



**Resolución
tiempo alta
frecuencia baja**



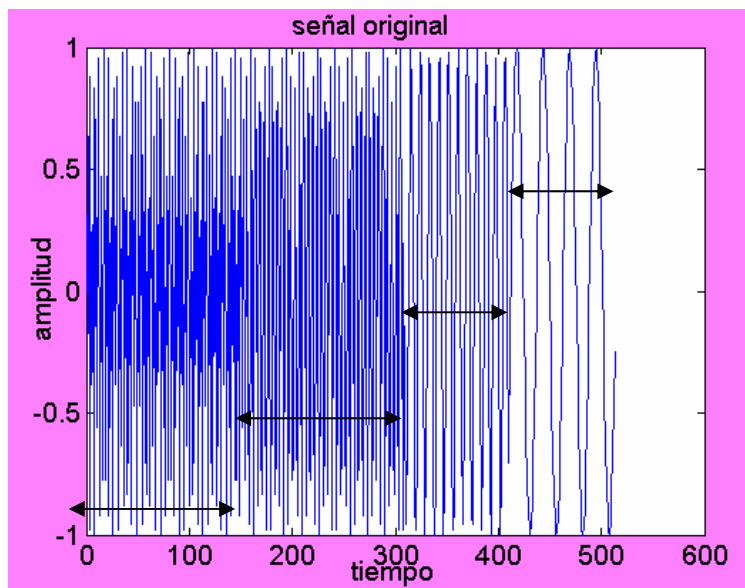
**Resolución
tiempo baja
frecuencia alta**

**Resolución
tiempo muy baja
frecuencia mas
alta**

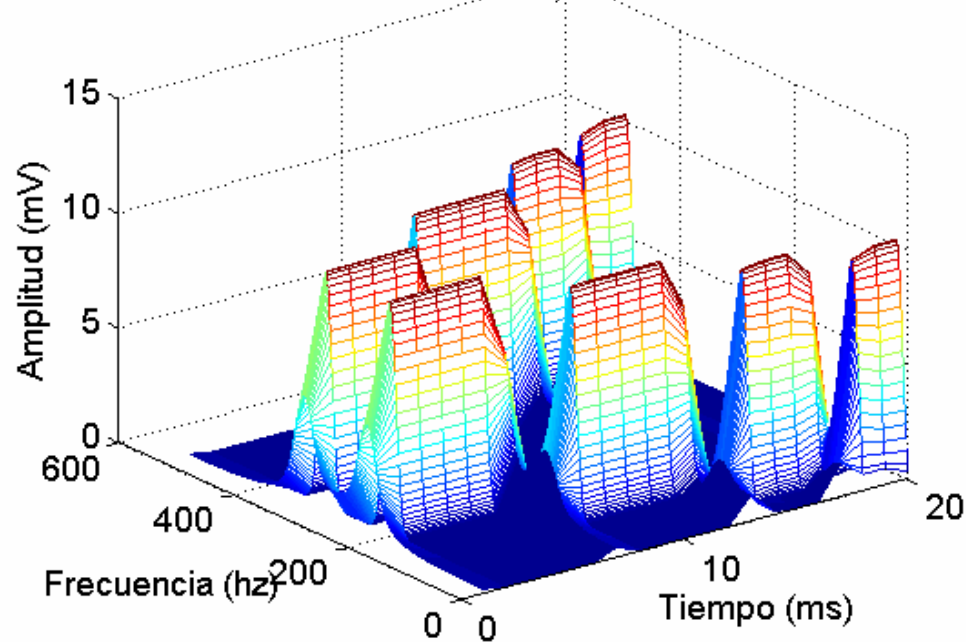
$x(t)$

Resolución en tiempo es alta, ya que se puede conocer el valor de la señal en cualquier tiempo.

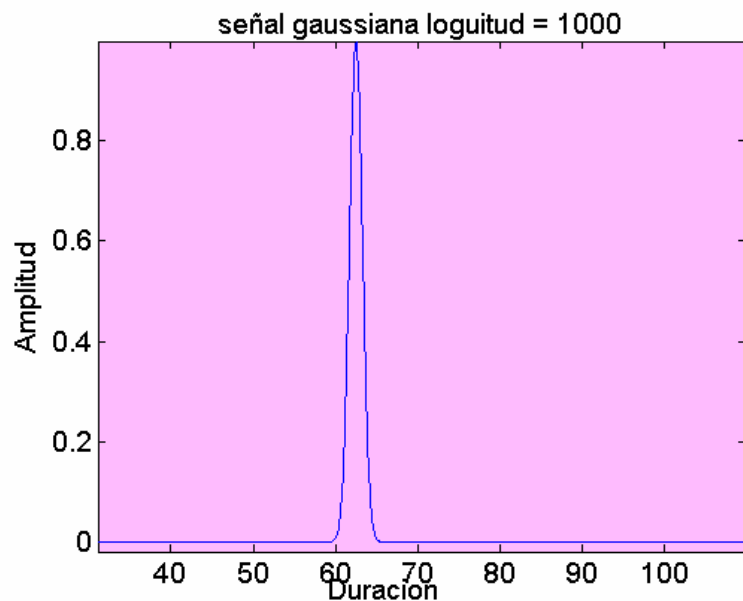
Transformada de fourier en tiempo corto S.T.F.T



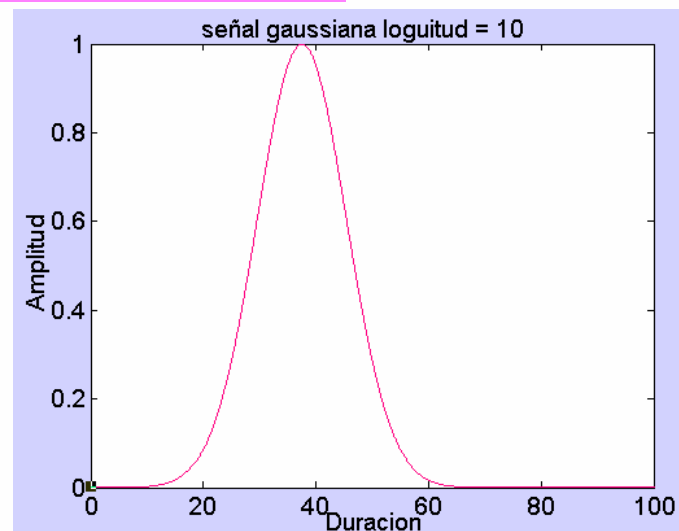
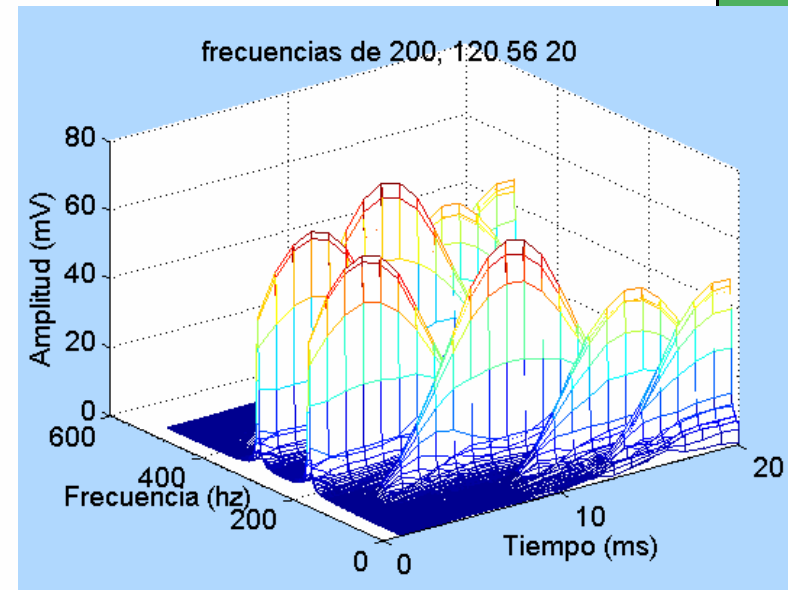
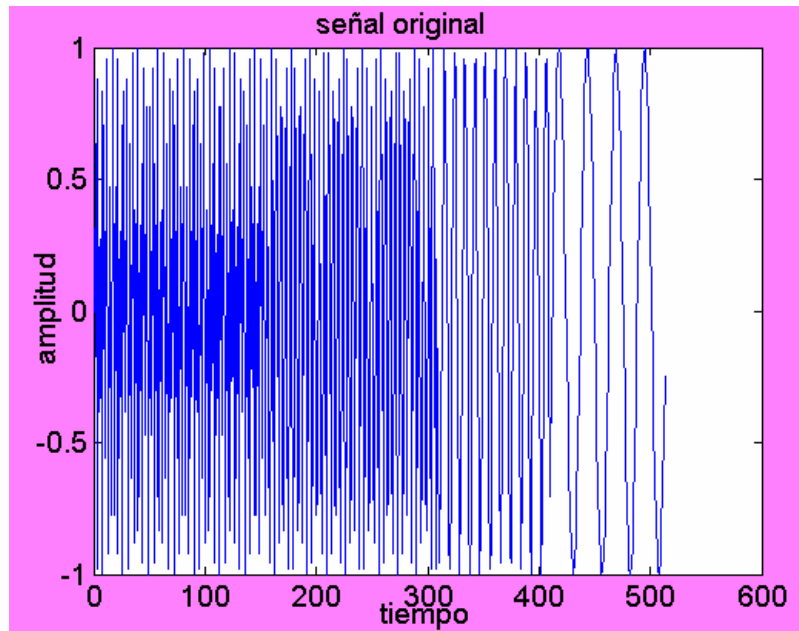
frecuencias de 200, 120 56 20



longitud de la ventana
1000

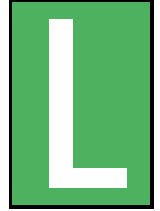


Transformada de fourier en tiempo corto S.T.F.T



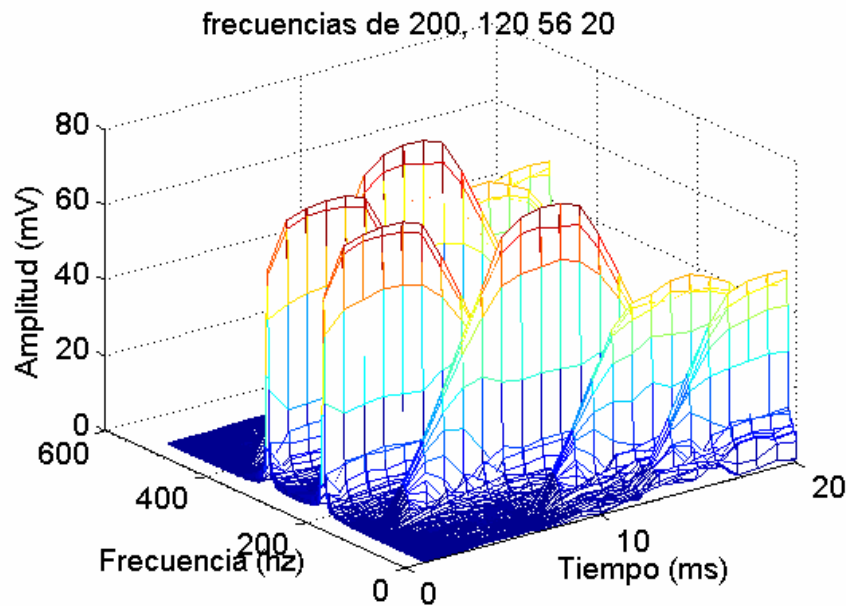
longitud de la ventana
10

Transformada de fourier en tiempo corto S.T.F.T

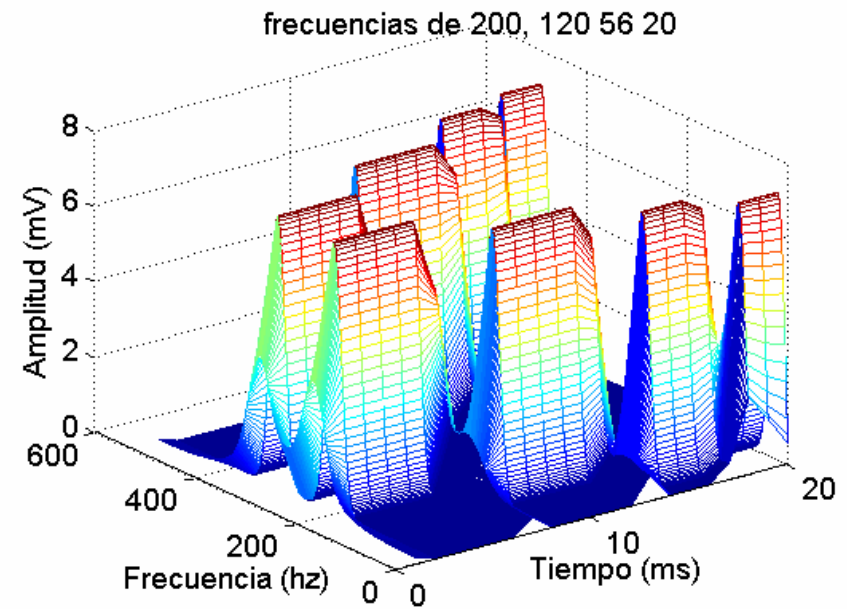


En conclusión:

Resolución baja en tiempo y alta en frecuencia para ventanas que tiendan la infinito.

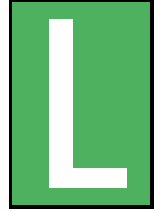


Resolución para el tiempo es alta y baja en frecuencia para ventanas de baja longitud



Análisis con resolución única, los componentes de frecuencia son analizado con una sola resolución.

INTRODUCCIÓN A WAVELET



Análisis multiresolucional

La transformada **WAVELET** aplica en su desarrollo un análisis multiresolucional, por este motivo en los últimos años ha tenido gran impacto.

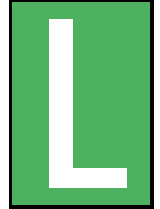
Wavelet trata de solucionar el problema de resolución STFT proponiendo un análisis multiresolucional.

Que es el análisis multiresolución ?

Es analizar la señal a diferentes frecuencias con resolución Diferentes.

Resolución en tiempo ↑ y resolución de frecuencia ↓ a frecuencias altas,
Resolución de tiempo ↓ y resolución de frecuencia ↑ a frecuencias bajas

CONCLUSIONES

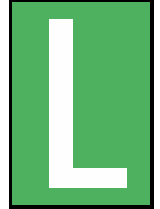


La FT tiene resolución **tiempo-frecuencia** alta para señales estacionarias y nula para señales no estacionarias.

La STFT resuelve el problema de **incertidumbre**, el inconveniente es que el análisis se hace con única resolución.

El análisis **multiresolucional** es el mas indicado para disminuir el problema de incertidumbre que esta presente en la STFT.

BIBLIOGRAFIA



cnyack.homestead.com

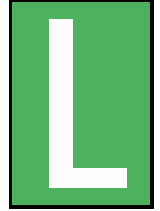
<http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTpart1.html>

mathworld.wolfram.com

www.arrakis.es

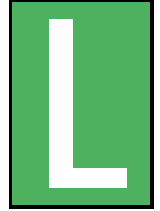
davis.wpi.edu/~matt/wavelets/

www.multiresolution.com



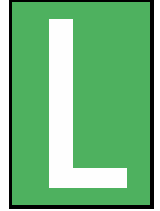
Preguntas

?



Próximo Seminario

Transformada wavelet



Gracias