



UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
MÉRIDA VENEZUELA

Aspectos básicos de los sistemas lógicos difusos

Jose Aguilar Castro
CEMISID

Justificación

Aquellos casos en los cuales la complejidad del problema y su carácter dinámico, o las incertidumbres alrededor del mismo, hacen difícil el establecimiento detallado de especificaciones.

Parecen ser apropiados adoptar enfoques que usen el aprendizaje por medio de la experiencia o el razonamiento heurístico para la toma de decisiones que permitan producir “soluciones confiables”

Lógica Difusa

- En la lógica clásica una proposición sólo admite dos valores: puede ser verdadera o falsa.

Lógica binaria

- Existen otras lógicas que admiten un tercer valor:

posiblemente

- La lógica difusa (o borrosa) es una de ellas, que se caracteriza por **querer cuantificar esta incertidumbre**

Definición

Cuando hablamos de lógica difusa, el **adjetivo “difuso”** se debe a que en esta lógica, los valores de verdad son **no-deterministas** y tienen, por lo general, una connotación de **incertidumbre**.

La lógica difusa tiene como base los denominados **conjuntos difusos** y posee un **sistema de inferencia basado en reglas de producción** de la forma “**SI antecedente ENTONCES consecuente**”, donde los valores lingüísticos del antecedente y el consecuente están definidos por conjuntos difusos.

Lógica difusa

- Los conjuntos difusos fueron introducidos como una forma matemática de representar la “**vaguedad**” de la vida cotidiana.
- La idea fundamental es la de desarrollar un marco de trabajo para el **tratamiento de la imprecisión**.
- Nació alrededor del año 1965 con los trabajos de Zadeh en los Estados Unidos, en los cuales aplicó la **lógica multi-valuada** a la teoría de conjuntos.

Lógica Difusa

- Zadeh introdujo el uso de una función, que expresaba el **grado de pertenencia** (o membresía) de los elementos a un conjunto dado, con valores en el rango entre 0 y 1.
- Estos últimos años ha tenido un gran interés en la comunidad científica a raíz de los avances en **lógica difusa, los algoritmos difusos, el control difuso, el razonamiento difuso**, etc.

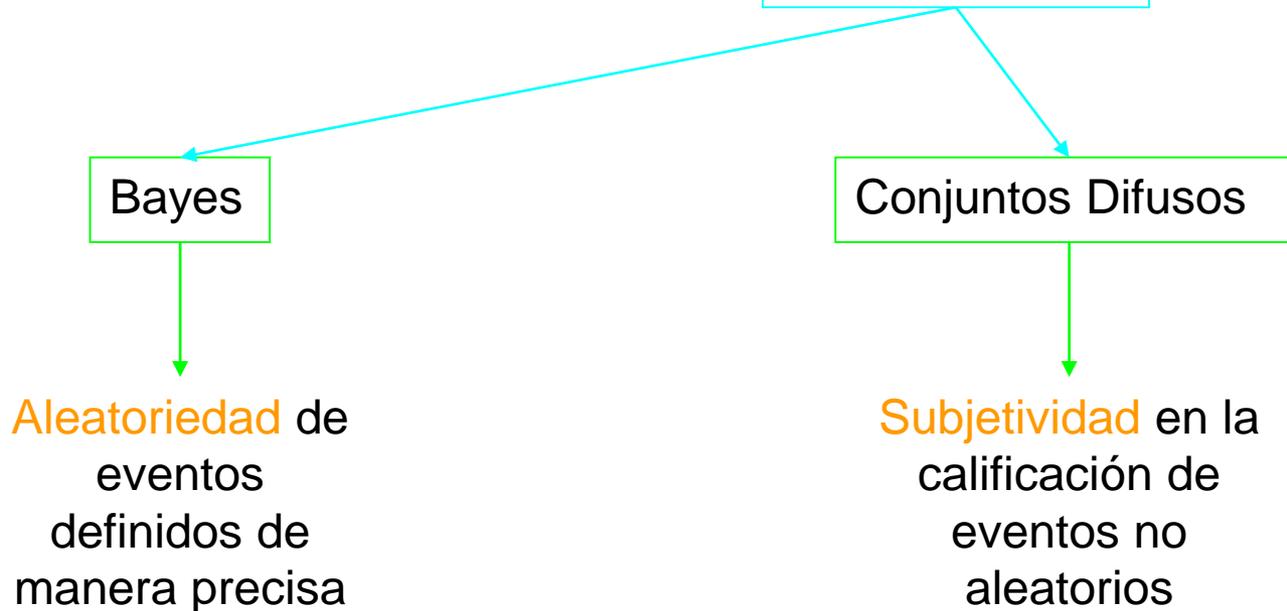
Introducción a la Lógica Borrosa

Idea

Un conjunto difuso es un conjunto cuya fronteras no están bien definidas

(subjetividad, vaguedad, imprecisión, ...)

y, por tanto, la pertenencia o no de un elemento al mismo contiene una cierta **incertidumbre**



Antecedentes de Lógica difusa

- En 1970 emergió el **diseño de controladores lógicos difusos** basados en reglas, gracias al trabajo de E. Mandami y sus colaboradores, quienes desarrollaron un sencillo y eficiente controlador para una máquina de vapor.

El trabajo de Mamdani abrió el camino para la implantación exitosa de **sistemas lógicos difusos.**

Hitos

- **J. LUKASIEWICZ (AÑOS 20) ->**
PRINCIPIOS LÓGICA MULTIVALUADA
- **L. ZADETH (1965) ->**
APLICACIÓN DE LA LÓGICA MULTIVALUADA A
LA TEORÍA DE CONJUNTOS
- **E. MAMDANI (MEDIADOS 70) ->**
PRIMERA APLICACION: CONTROLADOR
BORROSO

Áreas de aplicación de la L.D.

- Actualmente, existen una gran cantidad de compañías de software comercial e industrial que están desarrollando programas basados en ésta teoría, especialmente en Japón.
- El área de mayor aplicación ha sido en **control difuso** de características físicas o químicas, tales como temperatura, corriente eléctrica, flujo de líquidos, etc.

Áreas de aplicación de la L.D.

Productos de Consumo	Automóviles y generación eléctrica	Procesos Industriales	Robótica y Manufactura
Cámaras y filmadoras (Canon, Minolta, Ricoh, Sanyo) Lavadoras (Gldstar, LG, Whirpool) Refrigeradoras Aspiradoras	Control de vehículos (Nissan) Control de transmisión (Mitsubishi, Mazda, Honda)	Refinación Destilación Plantas petroquímicas Incineración Producción de cemento	Robots (mitsubishi) Reconocimiento de patrones y Visión por ordenador

Áreas de aplicación

- Los sistemas basados en lógica difusa **imitan la forma en que toman decisiones los humanos**, con la ventaja de ser mucho más rápidos.
- Son generalmente **robustos y tolerantes a imprecisiones y ruidos** en los datos de entrada.
- En la lógica difusa, se usan **modelos matemáticos para mapear nociones subjetivas**, como *caliente/tibio/frío*, a valores concretos que puedan ser manipuladas por los computadores.
- La lógica difusa **se utiliza cuando la complejidad del proceso en cuestión es muy alta y no existen modelos matemáticos precisos**: procesos altamente no lineales, cuando se envuelven definiciones/conocimiento no estrictamente definidos (o subjetivos).

LA BORROSIDAD

Por borrosidad entendemos el hecho de que una proposición pueda ser parcialmente verdadera y parcialmente falsa de forma simultánea.

- Replanteamiento radical de conceptos clásicos de verdad y falsedad, por el concepto de **vaguedad o borrosidad**. La verdad y/o falsedad no son más que casos extremos.
- Una persona no será simplemente alta o baja, sino que **participará de ambas características parcialmente**, mientras que en la zona intermedia de ambas alturas existirá una gradualidad por la que va dejando de ser alta.
- El concepto de borrosidad está **enraizado en la mayor parte de nuestros modos de pensar y hablar**.

Lógica Difusa

DIFERENCIAS ENTRE PROBABILIDAD Y BORROSO:

PROBABILIDAD:

- NÚMERO ENTRE 0 Y 1 PARA EXPRESAR LA POSIBLE OCURRENCIA DE UN EVENTO (NO HA OCURRIDO).
- SUPONE TENER UN MODELO DEL MUNDO.
- ES BASADA EN FRECUENCIAS HISTORICAS

BORROSO:

- GRADO DE POSIBILIDAD QUE UN PREDICADO SEA CIERTO.
- NO SE CONOCE MODELO DEL MUNDO.
- USA DESCRIPCIONES Y DESCRIBE EL MUNDO

Lógica Difusa

LÓGICA MULTIVALUADA EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS

=> GRADOS DE PERTENENCIA

=> CLASES CON LÍMITES MAL DEFINIDOS

⇒ GRADUALIDAD EN LOS CAMBIOS DE
ESTADOS

⇒ ETIQUETAS LINGUISTICAS

Conjuntos difusos

Un conjunto difuso posee como lógica subyacente una **lógica multivaluada**, y permite la **descripción de conceptos** en los cuales la **transición** entre poseer una propiedad y no poseerla, no son claros.

Lógica Difusa

- **Conjuntos difusos:** generalización de los conjuntos ordinarios, pero agregándoles un grado de pertenencia a cada elemento.
- **Grado de pertenencia** varia entre 0 y 1.
 - **0** significa que ese elemento no pertenece a un conjunto dado,
 - **1** significa que el elemento pertenece 100% a ese conjunto.

Definición de conjunto ordinario

Sea X un universo y sea S un subconjunto de X .

La función característica asociada con S es un mapa:

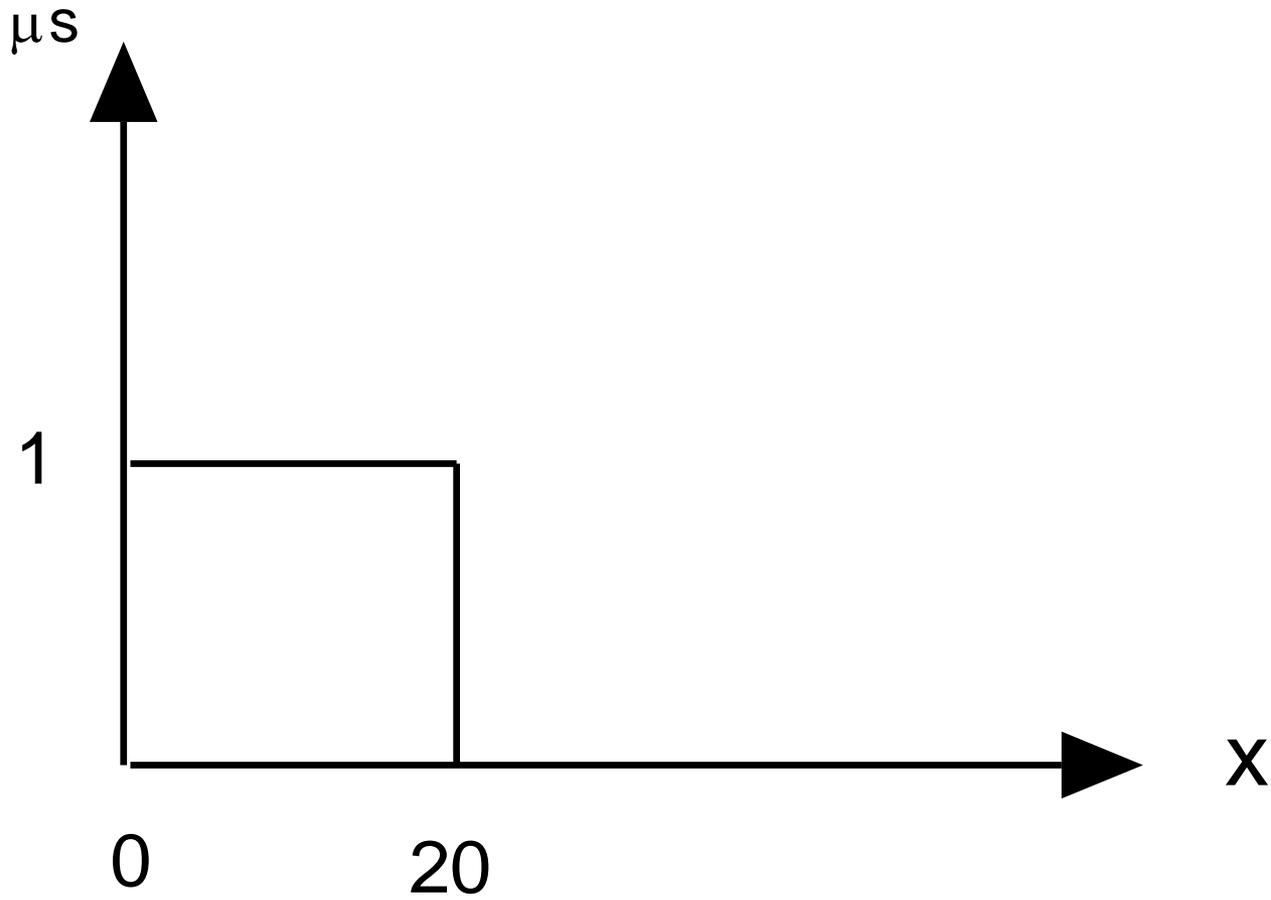
$$\mu_s : X \rightarrow \{0,1\}$$

tal que para cualquier elemento x del universo X ,

$$\mu_s(x) = 1 \quad \text{si } x \text{ es un miembro de } S$$

$$\mu_s(x) = 0 \quad \text{si } x \text{ no es un miembro de } S$$

Ejemplo de conjunto ordinario



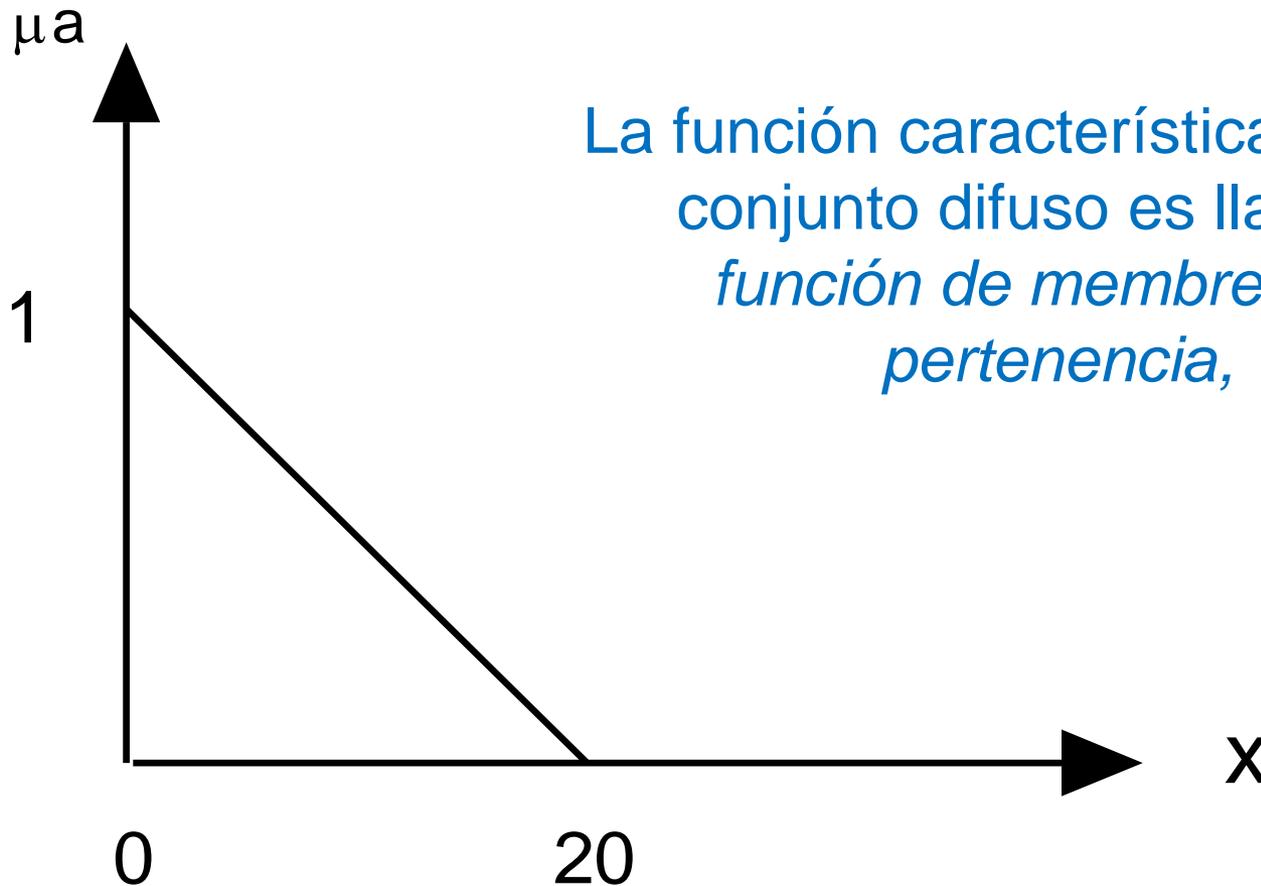
Definición de conjunto difuso

Sea X un conjunto que representa un universo. Un subconjunto difuso A del universo X está asociado a una función característica.

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1]$$

$\mu_A(x)$ indica el grado con el cual el elemento x del universo X es miembro del conjunto A

Ejemplo de conjunto difuso



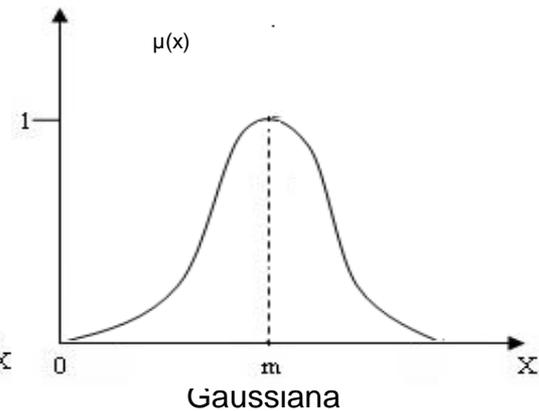
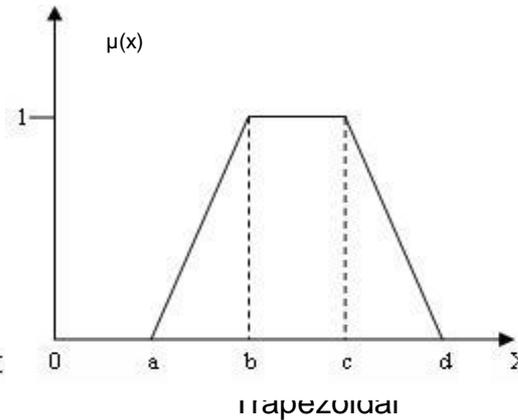
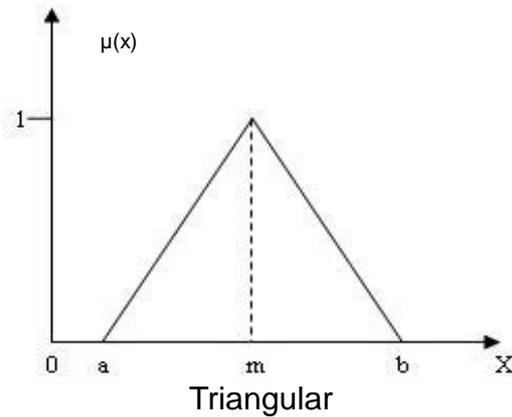
Lógica Difusa

Representación de los conjunto difuso

$A = \{x / \mu_A(x) \text{ para } x \in X\}$, donde x es un elemento, $\mu_A(x)$ define la función de pertenencia y X es el Universo.

- **Función de pertenencia para un conjunto:** define el grado de pertenencia de cada elemento a ese conjunto.

Ejemplos de funciones de membresía



$$\mu_A(x) = \exp\left(\frac{-(x - \mu_A(x))^2}{2\sigma_A^2}\right)$$

Donde σ permite cambiar la forma

Ejemplo de Conjunto Difuso

- U es universo recurso **EDAD** [0,120]

$$U=\{x/x \in [0, 120]\}$$

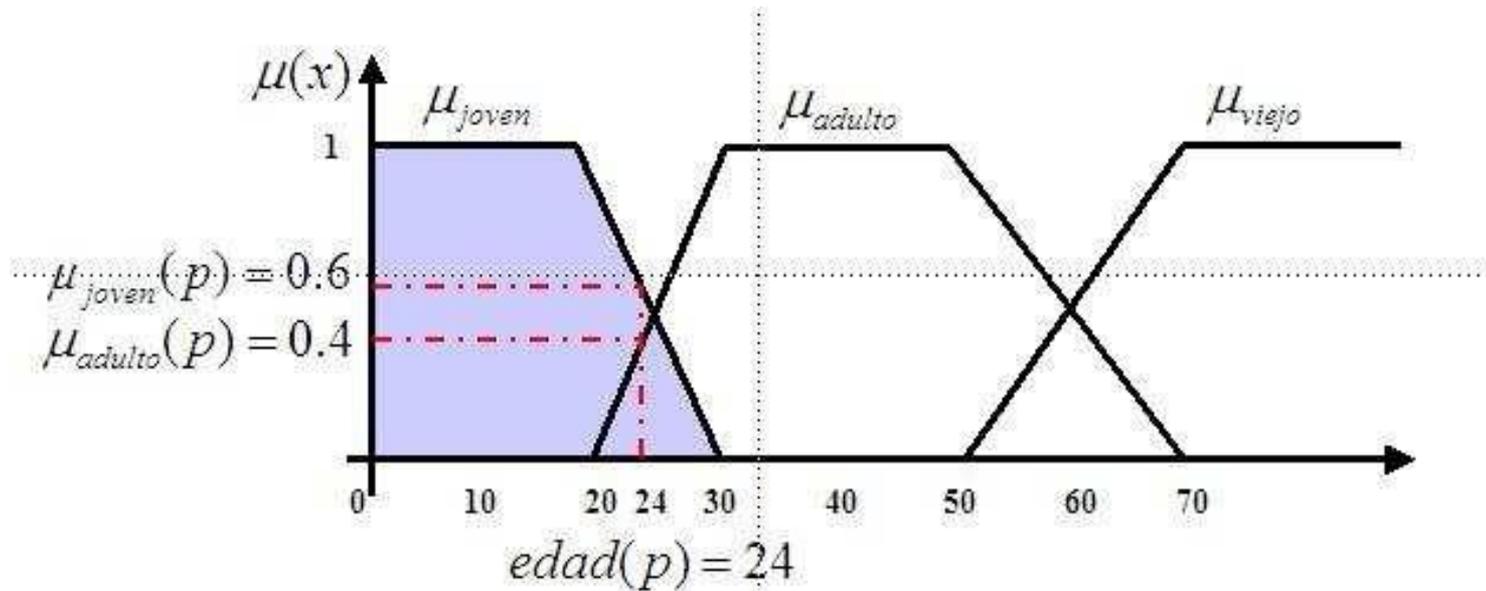
- Conjunto difusos **joven y viejo**

$$\text{Joven}=\{(x/1, 0 \leq x \leq 40) \cup \{x/1+(x-40)^2/40^{-1}, x>40)\}$$

$$\text{Viejo}=\{(x/0, 0 \leq x \leq 40) \cup \{x/1+(x-40)^{2-1}, x>40)\}$$

Función difusa

$$\mu_{\text{joven}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{edad}(x) \leq 20 \\ 1 - ((\text{edad}(x) - 20)/10) & \end{cases}$$



Nomenclatura de conjuntos difusos

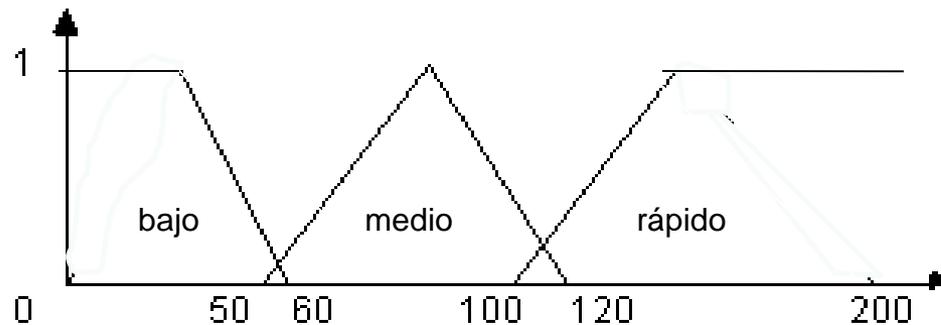
Asuma que $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; entonces $A = \left\{ \frac{0.7}{x_1}, \frac{0.03}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{0}{x_4} \right\}$ provee una **representación de un conjunto difuso de X.**

En esta representación del conjunto difuso A, un término de la forma a_1/x_1 debe ser entendido como indicando que el elemento x_1 posee grado de membresía a_1 en el subconjunto difuso A.

EJEMPLO DE CONJUNTOS DIFUSOS

3 CONJUNTOS DIFUSOS:

- RÁPIDO [100,200] , LENTO[0,60] , MEDIA[50,120]



- PARA UN CARRO QUE VA A UNA VELOCIDAD DE 55 KM/HORA:

$$\mu_{\text{BAJO}}(55) = 0.25 \quad \mu_{\text{MEDIO}}(55) = 0.25 \quad \mu_{\text{RAPIDO}}(55) = 0$$

$$\text{Bajo} = \{0/0, 0.5/15, 0.5/30, 0.5/45, 0/60\}$$

Variables Lingüísticas

- Si una **variable** puede tomar **valores** de “**palabras**” en un lenguaje natural (por ejemplo, pequeño, rápido, etc.), entonces esa variable define una **variable lingüística**.
- Estas palabras generalmente son **etiquetas** de conjuntos difusos.
- Una variable lingüística toma **valores lingüísticos** (por ejemplo, para velocidad: bajo, rápido, etc.); pero cuando es instanciada toma números según **función de pertenencia**).

Variables Lingüísticas

Variable lingüística = $(x, A(x), U, G, M)$

Donde

- X es el nombre de la variable
- $A(x)$ es el conjunto de términos lingüísticos de x
- U es el universo donde se define cada valor de x
- G es la regla sintáctica para generar las sentencias correctas en A
- M es la regla semántica que asocia a cada valor x su significado

Variables Lingüísticas

- Ejemplo:
 - X es la variable lingüística *edad*
 - $A(\textit{edad}) = \{\textit{niño}, \textit{joven}, \textit{adulto}, \textit{anciano}\}$
 - Universo de discurso $U [0, 120]$
 - G es la regla sintáctica para generar conjunto A
 - M es la regla semántica que asocia a cada valor x su significado

Lógica Difusa

- **Operaciones difusas**, para los conjuntos difusos A y B en el mismo universo U (solo ultimo caso no es en el mismo universo):

– Unión:

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \{x / \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U\}$$

– Intersección:

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \{x / \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U\}$$

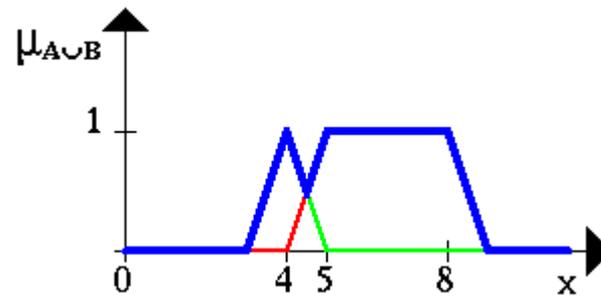
– Complemento de $\mu_A(x) = \{x / (1 - \mu_A(x)) \quad \forall x \in U\}$

– Producto cartesiano:

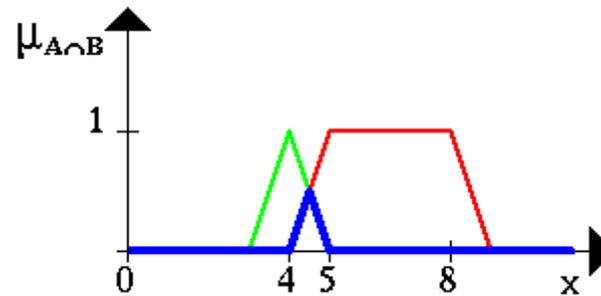
$$\mu_{A \times B}(x, y) = \{(x, y) / \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad \forall x \in U, \forall y \in V\}$$

Lógica Difusa

– Unión:

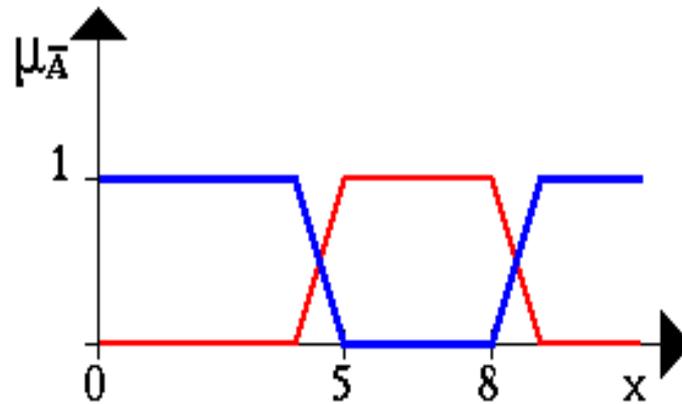


– Intersección:



Lógica Difusa

– Negación:



Operaciones sobre conjuntos difusos: Unión

Asuma que A y B son subconjuntos difusos de X. Su **unión** es un subconjunto difuso C de X, denotado por $C=A \cup B$, tal que para cada $x \in X$

$$C(x) = \text{Max}[A(x), B(x)] = A(x) \vee B(x)$$

Ejemplo: Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$; asuma que

$$A = \{1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e\} \text{ y } B = \{0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e\}$$

$$\text{Entonces } C = \{1/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.9/e\}$$

Operaciones sobre conjuntos difusos: Intersección

Asuma que A y B son subconjuntos difusos de X, la **intersección** de A y B, denotado por $D=A \cap B$, es tal que para cada $x \in X$,

$$D(x) = \text{Min}[A(x), B(x)] = A(x) \wedge B(x)$$

Ejemplo: Considerando A y B del ejemplo anterior, entonces $D = \{0.2/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.4/e\}$

Operaciones sobre conjuntos difusos: Complemento

Asuma que A y B son subconjuntos difusos de X . El **complemento** relativo de B respecto de A , denotado por $E=A-B$, es definido como el subconjunto difuso E de X donde para cada $x \in X$.

$$E(x) = \text{Max}[0, A(x) - B(x)]$$

Ejemplo: Asuma que $A = \{1/a, 0.3/b, 0.7/c, 0.6/d, 1/f\}$ y $B = \{1/a, 1/b, 0.3/c, 0/d, 0.5/f\}$.

Entonces $E = A - B = \{0/a, 0/b, 0.4/c, 0.6/d, 0.5/f\}$.

Operaciones sobre conjuntos difusos: otras

Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

Distributividad

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Operaciones sobre conjuntos difusos: otras

- IDEMPOTENCIA:

$$A \vee A = A$$

$$A \wedge A = A$$

- BORNES UNIVERSALES:

$$A \vee 0 = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \wedge 1 = A$$

Operaciones sobre conjuntos difusos: otras

Propiedades que cumplen el **complemento** y el **complemento relativo** de subconjuntos difusos A y B de X .

Doble negación

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Leyes de Morgan

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\emptyset} = X ; \overline{X} = \emptyset$$

Operaciones sobre conjuntos difusos

- Las funciones **min y max** son generalizaciones de las operaciones homónimas de los conjunto clásicos.
- En general:
 - La unión e intersección borrosa requieren funciones de forma tal que al aumentar uno de los conjuntos también aumente su unión e intersección
 - Dichas funciones deben ser conmutativas, distributivas y continuas

Las funciones que verifican tales propiedades son las que pertenecen a las clases conormas triangulares (conorma T) y normas triangulares (norma T)

Norma T

- Una norma T (denotada por “*”) es una función de $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que incluye:
 - Intersección difusa: $\text{Min}\{x,y\}$
 - Producto algebraico: $x.y$
 - Producto acotado: $x*y = \max\{0, x+y-1\}$
 - Producto drástico: $\{x \text{ si } y=1, y \text{ si } x=1, 0 \text{ si } x,y < 0\}$

donde $x,y \in [0,1]$

Conorma T

- La conorma T, denotada por $\dot{+}$, es una función de $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que incluye:
 - Unión difusa: $\text{Max}\{x,y\}$
 - Suma algebraica: $x+y-xy$
 - Suma acotada: $x \dot{+} y = \min\{1, x+y\}$
 - Suma drástica: $\{x \text{ si } y=0, y \text{ si } x=0, 1 \text{ si } x, y > 0\}$

Con $x, y \in [0,1]$

Relaciones difusas

Si A_1, A_2, A_k, A_n son conjuntos difusos de x_1, x_2, x_k, x_n respectivamente, entonces sus **productos cruzados** $A_1 \times A_2 \times A_k \times A_n$ es un conjunto difuso de $x_1 \times x_2 \times x_k \times x_n$, denotado por $T = A_1 \times A_2 \times A_k \times A_n$, donde

$$T(x_1, x_2, x_k, x_n) = \min_i [A_i(x_i)], \quad x_i \in X_i \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Ejemplo: Asuma que $A = \left\{ \frac{1}{a}, \frac{0.6}{b}, \frac{0.3}{c} \right\}$ y $B = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{0.5}{2}, \frac{0}{3} \right\}$ son conjuntos difusos sobre los espacios $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{1, 2, 3\}$ respectivamente, entonces

$$A \times B = \left\{ \frac{1}{(a,1)}, \frac{0.5}{(a,2)}, \frac{0}{(a,3)}, \frac{0.6}{(b,1)}, \frac{0.5}{(b,2)}, \frac{0}{(b,3)}, \frac{0.3}{(c,1)}, \frac{0.3}{(c,2)}, \frac{0}{(c,3)} \right\}$$

Relaciones difusas

Asuma que A es una relación difusa sobre $X \times Y$. La **proyección** de A sobre X es un conjunto difuso A° de X , que denotamos por $A^\circ = \text{Proy}_x A$ y que definimos por $A^\circ(x) = \text{Max}_y [A(x, y)]$

Ejemplo: Asuma $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{1, 2, 3\}$ y sea $A = \left\{ \frac{1}{(a,1)}, \frac{0.6}{(a,2)}, \frac{0.4}{(a,3)}, \frac{0.5}{(b,1)}, \frac{0.8}{(b,2)}, \frac{0.2}{(b,3)}, \frac{0.3}{(c,1)}, \frac{0.1}{(c,2)}, \frac{0.3}{(c,3)} \right\}$

Entonces $\text{Proy}_x A = \left\{ \frac{1}{a}, \frac{0.8}{b}, \frac{0.3}{c} \right\}$ y $\text{Proy}_y A = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{0.8}{2}, \frac{0.3}{3} \right\}$

Principio de la extensión

si A y B son dos números difusos, su suma $C=A+B$, es también un número difuso, donde para cada $z \in \mathbb{R}$,

$$C(z) = \underset{\substack{\text{todos los } x,y \\ / x+y=z}}{\text{Max}} [A(x) \wedge B(y)]$$

Más generalmente asuma que \perp es cualquier operación aritmética: adición, sustracción, multiplicación, división, o exponenciación y sean A y B dos números difusos. Entonces $A \perp B = C$, donde C es un número difuso tal que:

$$C(z) = \underset{\substack{\text{todos los} \\ x,y \in \mathcal{R}}}{\text{Max}} [A(x) \wedge B(y) / (x \perp y)]$$

Medidas Borrosas

- **Borrosidad:** distancia de un conjunto difuso A a uno discreto C, tal que C contiene los valores de x para $\mu_A(\mathbf{x}) > 0$
- **Distancia entre dos conjuntos difusos A y C**
 - Hamming $f(A) = \sum |\mu_A(\mathbf{x}) - \mu_C(\mathbf{x})|$
 - Euclidea $f(A) = (\sum ((\mu_A(\mathbf{x}) - \mu_C(\mathbf{x}))^2)^{1/2}$
 - ...
- **Similitud** es igual a distancia
- **Entropía Borrosa:** cuanto aporta conjunto A a la descripción de la variable x

$$f(A) = \sum \{ \mu_A(\mathbf{x}) \log \mu_A(\mathbf{x}) + [1 - \mu_A(\mathbf{x})] \log [1 - \mu_A(\mathbf{x})] \}$$

Operaciones sobre conjuntos difusos

- **Reglas de modificación:** adverbio (bastante, muy, mas o menos, etc.) que se utiliza para especificar una propiedad mas concreta
- Son operaciones sobre la función de pertenencia, ejemplos:
 - **Negación o “no”:** $NEG(\mu(x)) = 1 - \mu(x)$
 - **Concentración o “muy”:** $CON(\mu(x)) = \mu(x)^2$
 - **Dilatación o difusión o “algo”, o “mas o menos” o “casi”:**
 $DIL(\mu(x)) = \mu(x)^{0.5}$
 - **Intensificación o “bastante”:**
 $INT(\mu(x)) = 2\mu(x)$ si $0 \leq \mu(x) \leq 0.5$
 $1 - 2(1 - \mu(x))^2$ si $\mu(x) > 0.5$

Modificadores Lingüísticos: Hedges

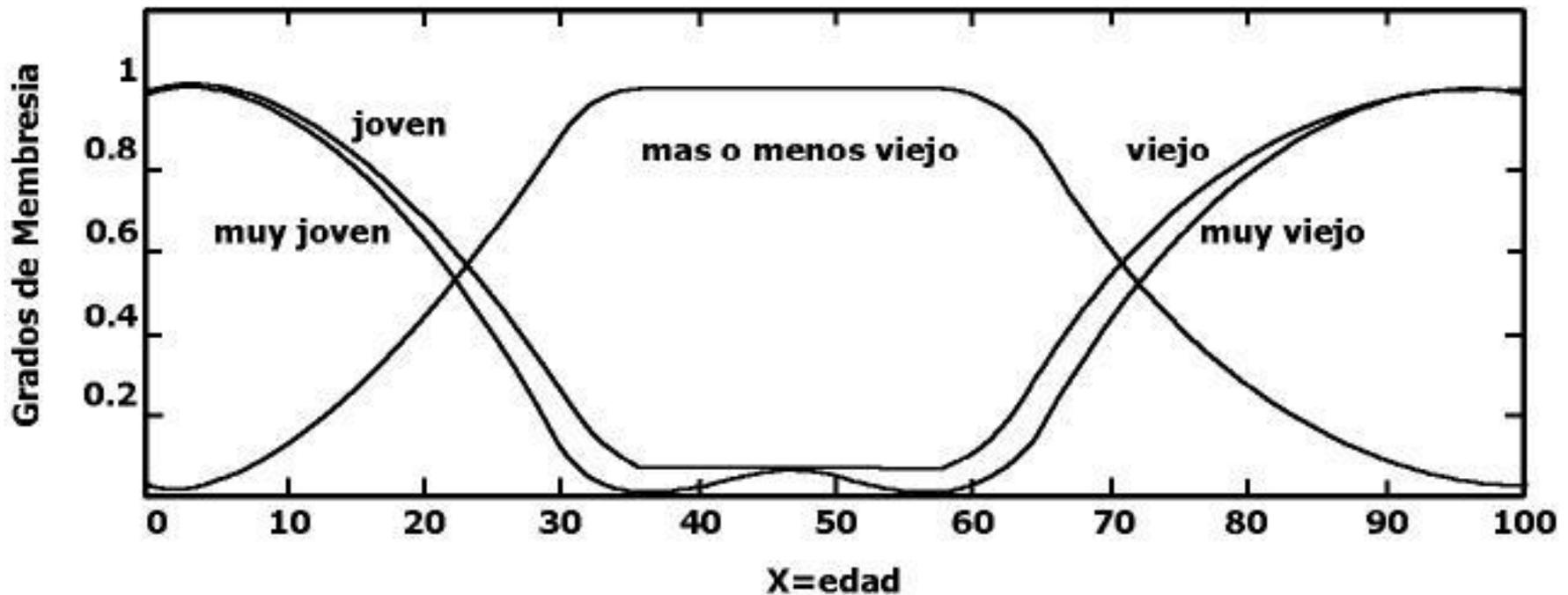
- Existen muchos descriptores lingüísticos como son: moderado, normal, alto, algo caliente, muy bajo, medio normal, mas o menos alto, etc.
- Uno de los conceptos importantes en la Lógica Difusa es que en vez de enumerar todos estos diferentes descriptores, se pueden generar de un conjunto esencial de términos lingüísticos (llamado: **Conjunto Término**) utilizando modificadores (por ejemplo: muy, mas o menos) y conectivas (por ejemplo: “y”, “o”).
- En Lógica Difusa a dichos modificadores se les denomina: **Hedges**

Ejemplo: Variables Lingüísticas Y Valores Lingüísticos.

- Si **edad** es interpretada como una variable lingüística, entonces su conjunto término $T(\text{edad})$ puede ser:

$$T(\text{edad}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{joven, no joven, muy joven, no muy joven, \dots,} \\ \text{medio viejo, no medio viejo, \dots,} \\ \text{viejo, no viejo, muy viejo, mas o menos viejo, no muy viejo, \dots,} \\ \text{no muy joven y no muy viejo, \dots} \end{array} \right\}$$

- Donde cada término en $T(edad)$ se caracteriza por un conjunto difuso de un universo de discurso $X = [0, 100]$, como se muestra en la siguiente figura.



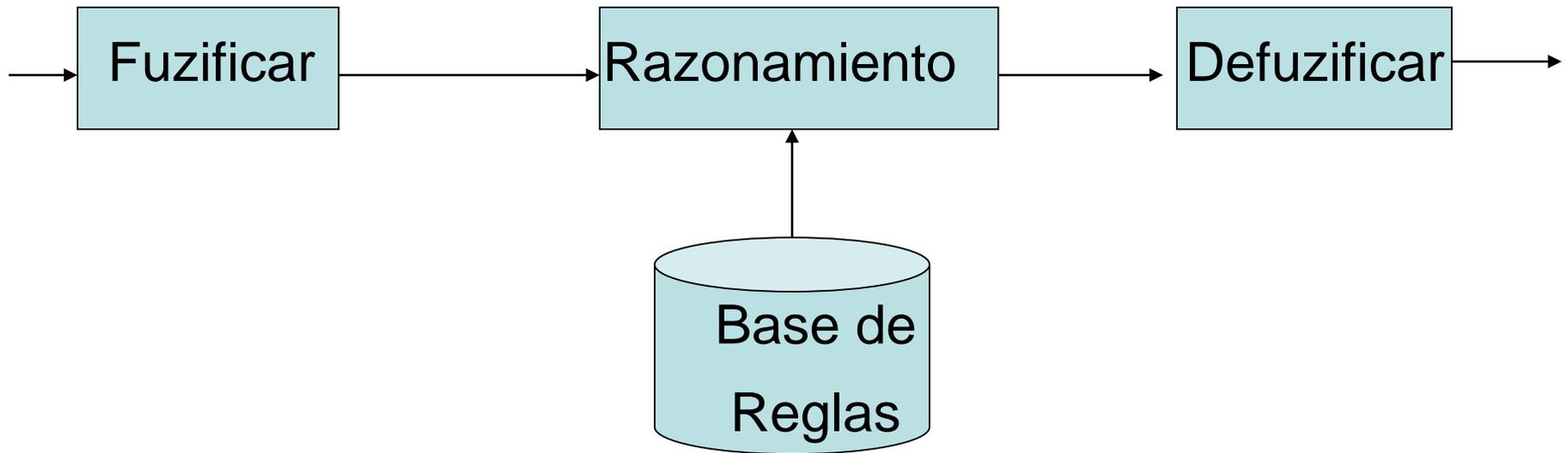
- Del ejemplo anterior, se observa que el conjunto termino consiste de varios ***términos primarios*** (joven, viejo) modificados por la ***negación*** ("no") y/o los adverbios (muy, mas o menos, completamente, extremadamente, etc.), y entonces ligados por conectivas tales como *y*, *o*, *y* *ni*.

Operaciones sobre conjuntos difusos

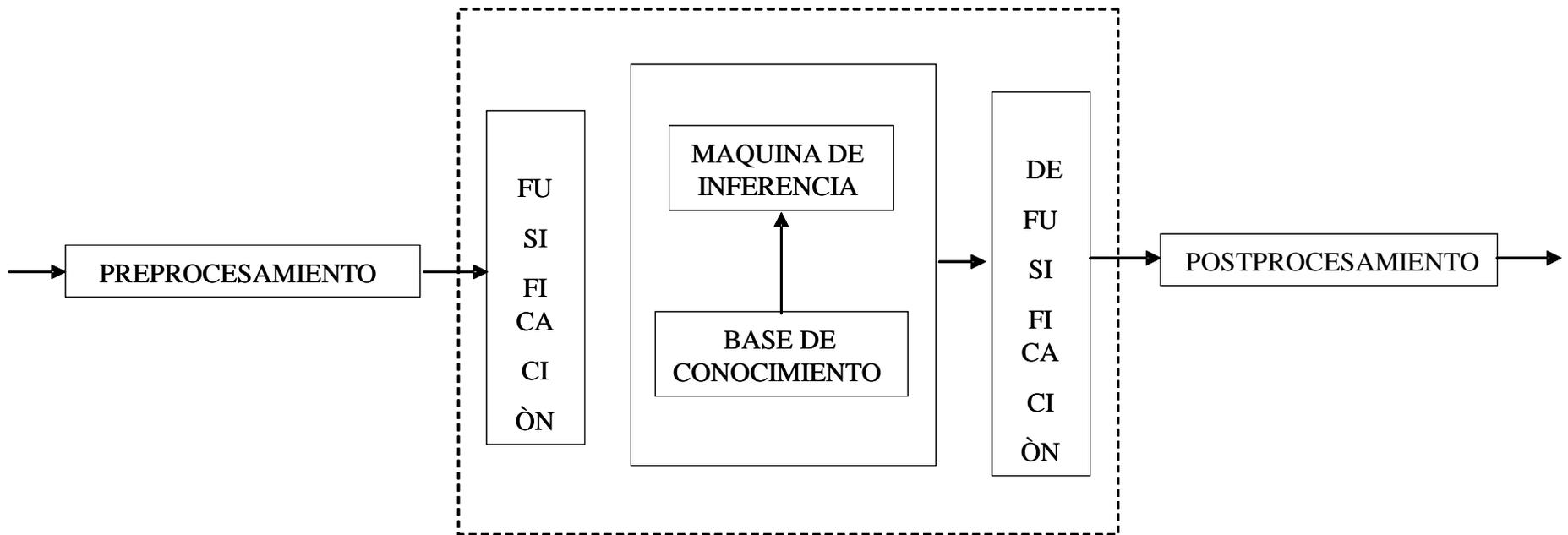
- **Altura de un conjunto difuso**: valor mas grande de su conjunto de pertenencia $\sup_{x \in X} \mu_A(x)$
- **Conjunto difuso normalizado**: $\text{Altura}(A)=1$
- **Soporte de un conjunto difuso** ($\text{soporte}(A)$): elementos de X que pertenecen a A con grado mayor a 0
- **Núcleo de un conjunto difuso**: elementos de X que pertenecen a A con grado mayor = 1
- **Cardinalidad de un conjunto difuso** $\text{card}(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$
- α -corte: valores de X con grado menores a α
- **Inclusión difusa**

$$S(A,B) = \sum \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x)) / \text{card}(A)$$

Sistemas Difusos



componentes básicos en el diseño de un sistema lógico difuso



Librería: <http://www.fuzzylite.com/>

Esquema de razonamiento

Las entradas son números en un rango específico



Todas las reglas son evaluadas en paralelo



Los resultados de las reglas son combinados y defuzificados

Razonamiento Aproximado

- El concepto central de esta teoría es **asignar conjuntos difusos** como valores de variables y representar este par variable-valor difuso **en sentencias o proposiciones lingüísticas**.

El sistema de *Razonamiento aproximado* ofrece un mecanismo para modelar y **hacer inferencias** a partir de relaciones funcionales **imprecisas** y constituye la base para derivar algunos de los mecanismos de inferencia conocidos.

Base de Reglas

- La lógica difusa puede ser representada por implicaciones difusas del tipo

$A \Rightarrow B$ (condición/acción)

si A entonces B, donde A y B son **proposiciones difusas**.

- La inferencia borrosa es basada en **implicaciones borrosas** y las reglas de inferencia derivadas de estas

\Rightarrow proceso deductivo llamado **modus ponens**.

Por ejemplo, si *Ana es Joven* entonces *personalidad es inmadura*.

Inferencia Difusa

La operación de implicación se puede expresar en la forma:

$$p \rightarrow q : \text{si } (X \text{ es } A) \text{ entonces } (Y \text{ es } B)$$

donde A y B son variables lingüísticas definidas como conjuntos difusos sobre los universos de discurso de X e Y respectivamente.

Ejemplos:

- Si la presión es baja entonces el volumen es grande
- Si el tomate es rojo entonces está maduro
- Si la velocidad es alta entonces frenar ligeramente

Proposiciones Difusas

- Proposición X es A ,

donde X es una variable que toma su valor de un dominio U y A es un conjunto difuso que pertenece a ese dominio

La talla de Juan es Grande

- Imprecisión no difusa

Juan Mide entre 1.80m y 1.90m

- Imprecisión difusa

Juan mide casi 1.82m

Lógica de conducción de un automóvil considerando la velocidad y la distancia entre autos

- **Regla 1**: Si la distancia entre autos es corta y la velocidad es baja mantener la velocidad
- **Regla 2**: Si la distancia entre autos es corta y la velocidad es alta reducir la velocidad
- **Regla 3**: Si la distancia entre autos es larga y la velocidad es baja aumentar la velocidad
- **Regla 4**: Si la distancia entre autos es larga y la velocidad es alta mantener la velocidad

Problema: Control automático de una lavadora

- La naturaleza de las decisiones que realizan los seres humanos en este problema es fácil de entender y modelar.
- Tarea: Se desea automatizar la selección del ciclo y el tiempo de lavado basado en la cantidad de ropa y lo sucia que esta la ropa, lo cual es proporcionado por dos transductores.

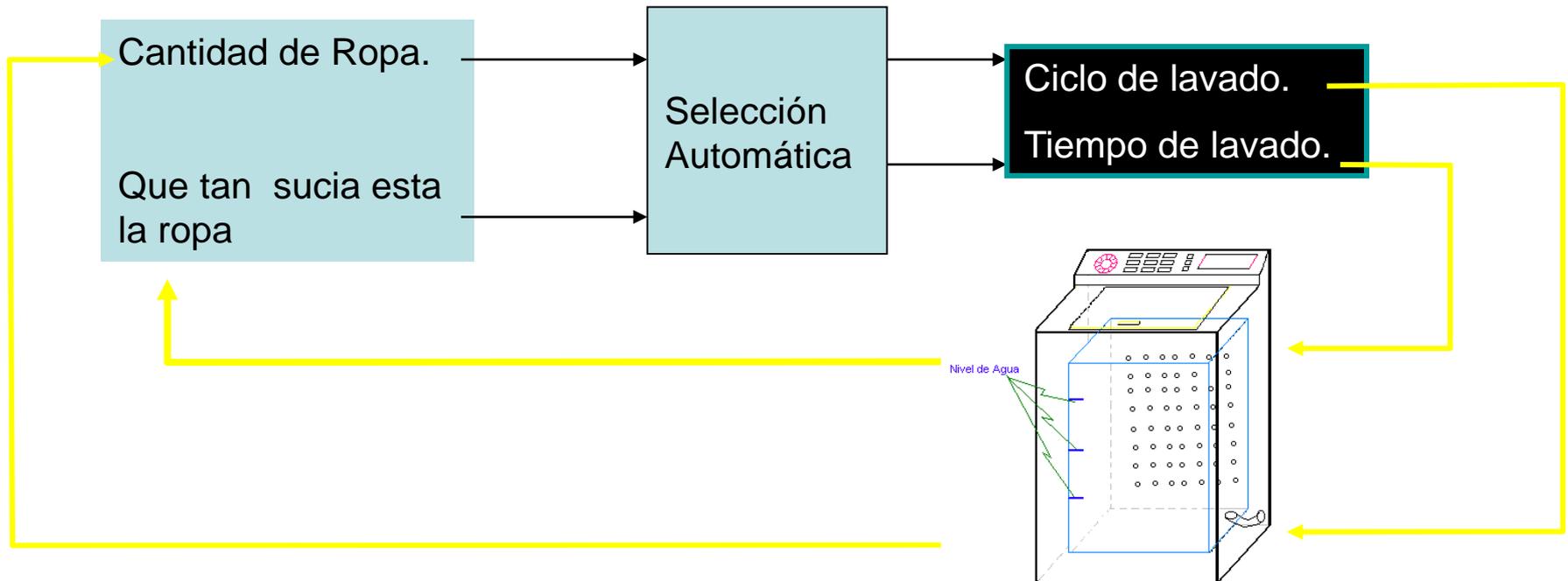


Tabla de Reglas Difusas para el ciclo de lavado

<small>CANT. DE ROPA</small> MUGROSIDAD	Poca	Medio	Mucha
Suave	Delicado	Ligero	Normal
Normal Suave	Ligero	Normal	Normal
Normal Rudo	Ligero	Normal	Fuerte
Rudo	Ligero	Normal	Fuerte

Lógica Difusa

- **Conocimiento:**

- Colección de proposiciones difusas (V es M)
- Sobre un conjunto de variables (V variable difusa)
- Sometidas a un proceso de inferencia

- **Razonamiento Aproximado:**

- **Conjunción(P1xP2)** P1= Va es M P2=Vb es N
 => V es P tal que $\mu_P(z) = \mu_M(x) \wedge \mu_N(y)$
 Si Va=Vb es una intersección

Si Va no tiene var. Comun Vb es prod. Cartesiano

- **Proyección P sobre Vb** para P=Va es M es P1=Vb es N

=> $\mu_N(z) = \max_Q(\mu_M(x))$ Q son los x de Va que
 concuerdan con z en Vb
 para var. en común en los 2

Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

- Los elementos básicos de un sistema de razonamiento aproximado son la colección de **variables simples** V_1, \dots, V_n y una **colección de conjuntos** X_1, \dots, X_n , donde cada X_i es el *conjunto base* en el universo de discurso de la variable V_i .
- Dicho conjunto X_i contiene **los valores posibles** que puede tomar la variable V_i .

Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

- Una *variable conjunta* es una colección de una o más variables simples. Por ejemplo, V_a , V_b y V_c son variables conjuntas definidas por $V_a=(V_1, V_2)$, $V_b=(V_1, V_4, V_5)$ y $V_c=V_1$.
- Una *proposición* es una sentencia de la forma V es M , donde V es una variable conjunta, M es un conjunto difuso **sobre el espacio del producto cartesiano de los conjuntos base de las variables simples** que conforman a la variable conjunta.

Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

Sean V_a y V_b dos variables simples sobre las bases X y Y , respectivamente. Sean $P_1=V_a$ es M y $P_2=V_b$ es N dos proposiciones. Su conjunción P_1 y P_2 es la proposición:

V es P

donde V es una **variable conjunta** que consiste en la unión de las **variables simples** que conforman a V_a y V_b y P es un conjunto difuso sobre el dominio de V , tal que para z en el dominio de V :

$$\mu_P(z) = \mu_M(x) \wedge \mu_N(y)$$

donde x es el elemento en X que concuerda con z sobre el dominio que **tienen en común**. Análogamente, y es el elemento de Y que concuerda con z sobre el dominio que **tienen en común**.

Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

- Si las variables en la operación conjunción son las mismas, la operación se reduce a la operación *intersección* entre conjuntos difusos.

$$(Va \text{ es } M) \cap (Va \text{ es } N) = Va \text{ es } M \cap N$$

- Si Va y Vb no tienen variables comunes, la operación conjunta resulta en el clásico *producto cartesiano*. Esto es:

$$(Va \text{ es } M) \cap (Vb \text{ es } N) = (Va, Vb) \text{ es } M \times N$$

La manipulación del conocimiento a través de proposiciones difusas en un sistema de razonamiento aproximado, está basada fundamentalmente en las operaciones de *implicación* y *proyección*.

Modus ponens: lógica clásica

- En lógica clásica, si una regla es verdadera y el antecedente de la regla es verdadera, entonces puede inferirse que el consecuente de la regla es verdadero.
- Lo anterior es referido como *modus ponens*. Por ejemplo, si la regla R1 es verdadera:
 - R1: IF el ingreso anual de una persona es más grande que 120K THEN la persona es rica.
- Y también, la siguiente declaración es verdadera:
 - El ingreso anual de Pedro es de 121K
- Basados en el *modus ponens*, la lógica clásica puede deducir que la siguiente declaración también es verdadera:
 - Pedro es rico.
- Una limitación del *modus ponens* es que no puede manejar situaciones parciales, como por ejemplo, la regla R1 y un caso diferente:
 - El ingreso anual de Juan es de \$199,999.

Modus ponens: lógica clásica

- Generalmente, se diría que Juan es un poco rico, Sin embargo, el *modus ponens* no puede inferir si Juan es rico o no utilizando la regla R1, porque el ingreso anual de Juan no satisface el antecedente de R1, aunque solamente le falta un peso. El problema tiene dos causas:
 - (1) El antecedente de R1 no representa una transición suave hacia la categoría “rico” lo cual con frecuencia se observa en el razonamiento humano.
 - (2) El *modus ponens* no puede manejar una situación donde el antecedente de una regla sea parcialmente satisfecho.
- Al tomar en cuenta tales limitantes, la “inferencia difusa basada en regla” generaliza el *modus ponens*, permitiendo que sus conclusiones inferidas sean modificadas por el grado para el cual el antecedente se satisfaga. Lo anterior es la esencia de la “inferencia difusa basada en reglas”.

Modus Ponens

Empleando alguna de las definiciones anteriores de implicación es posible definir el proceso de inferencia difusa empleando “modus ponens”.

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Dadas las certezas de un antecedente y la de la implicación, la determinación de la certeza del consecuente se realiza en base a una **función generadora del modus ponens que denominaremos mod()**

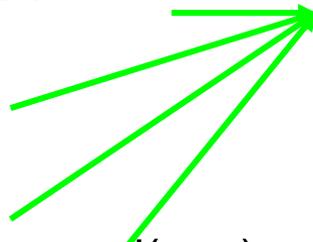
La función mod() debe verificar una serie de **propiedades**, algunas de las cuales son las siguientes:

a) $\text{mod}(u, \text{imp}(u, v)) \leq v$

b) $\text{mod}(1, 1) = 1$

c) $\text{mod}(0, u) = v$

d) $u \leq v \Rightarrow \text{mod}(u, w) \leq \text{mod}(v, w)$



d) La función mod() debe ser monótona creciente con la certeza del antecedente

Modus ponens generalizado

Sea U y V dos variables lingüísticas y A' , A , B' y B conjuntos difusos. Entonces, el procedimiento de inferencia *modus ponens generalizado* se define como:

Premisa 1: U es A (proposición de entrada)

Premisa 2: Si U es A entonces V es B

Consecuencia: V es B (proposición inferida).

La proposición inferida se obtiene a partir del mecanismo propuesto por la teoría de razonamiento aproximado, formando la conjunción de las premisas 1 y 2

Implicaciones difusas

Una implicación difusa $A \rightarrow B$ puede ser entendida como una regla difusa del tipo “Si – Entonces”.

Ejemplo: Si x es A entonces y es V ;

donde $x \in U$, $y \in V$ son variables lingüísticas.

Tipos de Implicaciones difusas

Sean A y B conjuntos difusos en U y V , respectivamente. Una implicación difusa, denotada por $A \rightarrow B$, es un tipo especial de relación difusa en $U \times V$ con una de las siguientes funciones de membresía:

(a) **Conjunción Difusa:** $\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \mu_A(u) * \mu_B(v)$

(b) **Disyunción Difusa:** $\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \mu_A(u) \dot{+} \mu_B(v)$

(c) **Implicación Material:** $\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \mu_{\bar{A}}(u) \dot{+} \mu_B(v)$

(d) **Cálculo Proposicional:** $\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \mu_{\bar{A}}(u) \dot{+} \mu_{A^*B}(v)$

Tipos de Implicaciones difusas

(e) Implicación borrosa por la regla del mínimo: $\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \min[\mu_A(u), \mu_B(v)]$

(f) Implicación borrosa por la regla del producto: $\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \mu_A(u)\mu_B(v)$

(g) Implicación borrosa por la regla aritmética $\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \min[1, 1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)]$

(h) Implicación borrosa por la regla Max-Min:

$$\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \max\{\min[\mu_A(u), \mu_B(v)], 1 - \mu_A(u)\}$$

(i) Implicación borrosa por la regla Booleana: $\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \max\{1 - \mu_A(u), \mu_B(v)\}$

Procedimiento para la obtención de la salida difusa

Si las entradas al SD son los valores $u_1 = x_1^*$ y $u_2 = x_2^*$, entonces un procedimiento para obtener el valor aproximado de la variable de salida difusa V es el siguiente:

1. Encuentre el nivel de tiro de cada una de las reglas.
2. Encuentre la salida para cada regla (implicación difusa)
3. Agregue las salidas de las reglas individuales para obtener la salida total del sistema.

Modelos Difusos

Basado en Reglas SI-ENTONCES con proposiciones difusas y razonamiento aproximado.

- SISO SI A ENTONCES B
- MISO SI U1 Y U2 Y U3 ... ENTONCES B
- MIMO SI U1 Y U2 Y U3 ... ENTONCES V1; V2; V3

Razonamiento Aproximado Básico

(CADA REGLA TIENE SU PESO)

- :SI (X ES A_i) ENTONCES (Y SERÁ C_j)

$$\mu_{C_j}(Y) = \text{PESO DE LA REGLA} = \mu_{A_i}(X)$$

- SI (X_1 ES A_i) Y (X_2 ES B_j) ENTONCES (Y SERÁ C_j)

$$\mu_{C_j}(Y) = \text{PESO DE LA REGLA} = \text{MIN}(\mu_{A_i}(X_1), \mu_{B_j}(X_2))$$

- SI (X_1 ES A_i) O (X_2 ES B_j) ENTONCES (Y SERÁ C_m)

$$\mu_{C_m}(Y) = \text{PESO DE LA REGLA} = \text{MAX}(\mu_{A_i}(X_1), \mu_{B_j}(X_2))$$

- R1: SI ... ENTONCES (Y1 SERÁ C) Y (Y2 SERA D)

R2: SI ... ENTONCES (Y1 SERÁ C) Y (Y2 SERA E)

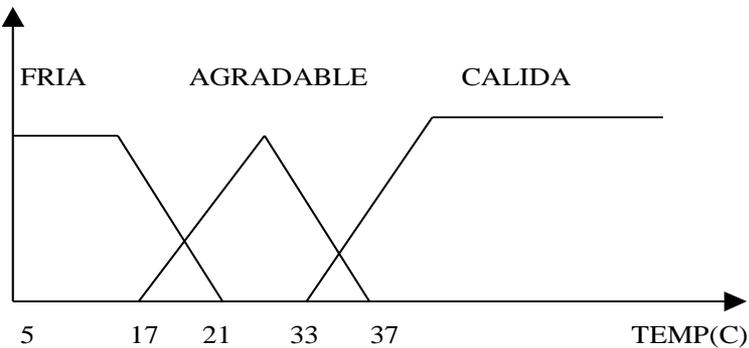
$$\mu_C(R1 \cup R2) = \text{MAX}(\text{PESO REGLA R1}, \text{PESO REGLA R2})$$

$$\mu_D(Y1) = \text{PESO REGLA R1}$$

$$\mu_E(Y2) = \text{PESO REGLA R2}$$

Lógica Difusa

- Ejemplo 1:

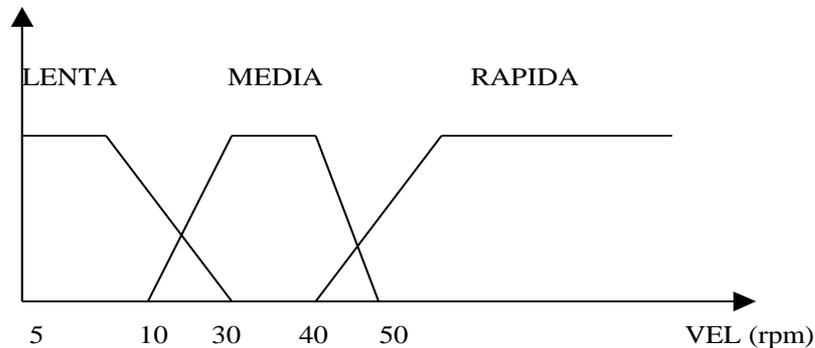


$$\text{TEMP}(18) = \{0.5/\text{FRIA}, 0.2/\text{AGRADABLE}, 0/\text{CALIENTE}\}$$

BASE DE REGLAS: SI TEMP ES FRIA ENTONCES VEL SERA LENTA

SI TEMP ES AGRADABLE ENTONCES VEL SERA MEDIA

SI TEMP ES CALIDA ENTONCES VEL SERA MAXIMA



Algoritmo de inferencia para modelo SISO

SI (X ES Bi) ENTONCES (Y SERÁ Di)

1. Para cada Regla

- Grado de disparo de la regla i (nivel de disparo τ_i de la i -ésima regla)

$$\tau_i = \mu_{B_i}(x)$$

- Conjunto difuso F_i dado como salida por la regla i (implicación difusa)

$$F_i(y) = \tau_i \wedge \mu_{D_i}(y) \quad \Rightarrow \quad \mu_{R_i}(x, y) = \mu_{B_i}(x) \wedge \mu_{D_i}(y)$$

2. Agregación de las salidas de cada regla $F(y)$

$$F_i \quad F(y) = \vee_i F_i(y) \quad R = \cup_i R_i$$

$$\Rightarrow \quad \mu_R(x, y) = \vee_i \mu_{R_i}(x, y) = \vee_i (\mu_{B_i}(x) \wedge \mu_{D_i}(y))$$

Algoritmo de inferencia para modelo MISO

$$R_i = B_{i1} \wedge B_{i2} \wedge \dots \wedge B_{ir} \wedge D_i$$

1. Para cada Regla

- Grado de disparo de la regla i

$$\tau_i = (\bigwedge \mu_{B_{i1}}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{B_{ir}}(x_r))$$

- Conjunto difuso F_i dado como salida por la regla i

$$F_i(y) = \tau_i \wedge \mu_{D_i}(y)$$

2. Agregación de las salidas de cada regla $F(y)$

$$F(y) = \bigvee_i F_i(y)$$

Cálculo del grado de disparo para modelos MIMO

- Para el caso de modelos MIMO, siendo considerados como un conjunto de subsistemas MISO, el cálculo de τ_i para la i -ésima regla de cada subsistema es:

$$\tau_i = \mu_{Bi1}(x_1^*) \wedge \dots \wedge \mu_{Bir}(x_r^*)$$

Cálculo del grado de disparo para modelos MIMO

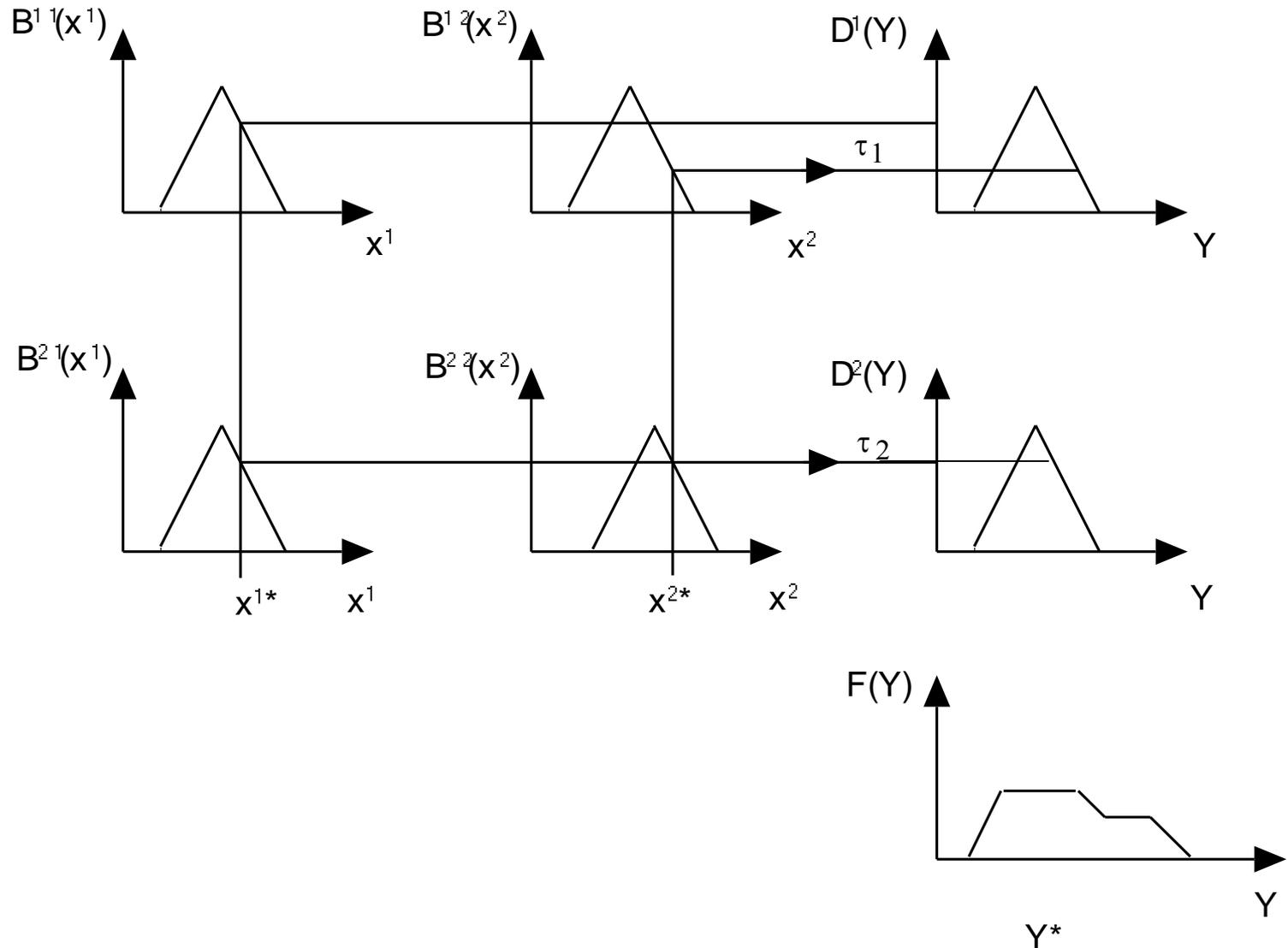
- En el modelo propuesto por Takagi-Sugeno-Kang, el mecanismo de inferencia propone el grado de disparo de cada **regla híbrida** dada por la ecuación

$$\tau_i = \mu_{Bi1}(u_1) \wedge \dots \wedge \mu_{Bir}(u_r)$$

Donde u_j es un valor puntual $j=1, \dots, r$

parecido a la anterior!!!

Algoritmo de razonamiento de un SD tipo Mamdani



Lógica Difusa (Modelo de Mamdani)

- EJEMPLO 2:

R1: SI e ES NEG Y ∇e ES NEG ENTONCES ∇u ES NEG

R2: SI e ES NEG Y ∇e ES CERO ENTONCES ∇u ES NEG

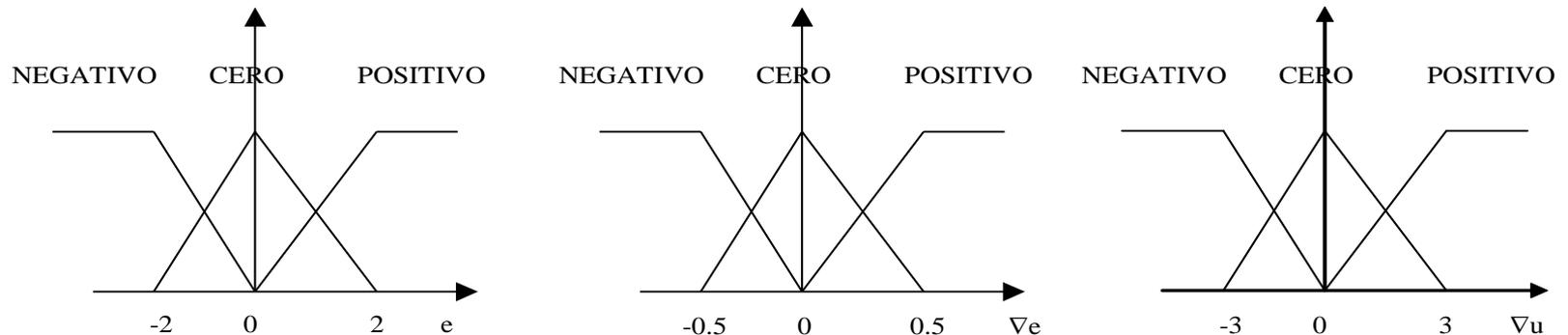
R3: SI e ES NEG Y ∇e ES POSIT ENTONCES ∇u ES CERO

R4: SI e ES CERO Y ∇e ES NEG ENTONCES ∇u ES NEG

R5: SI e ES CERO Y ∇e ES CERO ENTONCES ∇u ES CERO

R6: SI e ES CERO Y ∇e ES POSIT ENTONCES ∇u ES POSIT

...



Lógica Difusa (Modelo de Mamdani)

- EJEMPLO 2:

SUPONER DE ENTRADA $e = -2.1$ Y $\nabla e = 0.5$

=> R3 UNICA QUE SE ACTIVA

ADEMAS, EL UNIVERSO DE DISCURSO DISCRETO DE

∇e ES $\{-2, -1, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 1, 2\}$

e ES $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

∇u ES $\{-6, -4.5, -3, -1.5, 0, 1.5, 3, 4.5, 6\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu_N(\nabla u) &= [1, 1, 1, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0] \\ \mu_C(\nabla u) &= [0, 0, 0, 0.5, 1, 0.5, 0, 0, 0] \\ \mu_P(\nabla u) &= [0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1] \end{aligned}$$

GRADO MEMBRESIA DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS DE SALIDAS

$$\mu_{F1}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$\mu_{F2}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$\mu_{F3}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0.5, 1, 0.5, 0, 0, 0]$$

$$\mu_{F4}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$\mu_{F5}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$\mu_{F6}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

DEFUSIFICACIÓN

CONSISTE EN DETERMINAR VALOR NUMÉRICO DESDE UNA SALIDA BORROSA.

- FUNCION DE PERTENENCIA DEL CONJUNTO BORROSO DE SALIDA

$$\begin{aligned}\mu_X(Y) &= \text{PESO REGLA } R_i * \mu_{X_i}(Y) + \text{PESO REGLA } R_j * \mu_{X_j}(Y) + \dots \\ &= \text{MIN}(\text{PESOREGLA } R_i, \mu_{X_i}(Y)) + \text{MIN}(\text{PESOREGLA } R_j, \mu_{X_j}(Y))\end{aligned}$$

Difusificación sencilla

- Dado un valor puntual $x^* \in X$, el mecanismo de difusificación consiste en crear un conjunto difuso A , cuya función de pertenencia es aquella donde para cualquier $x \in X$ su valor es cero excepto en el valor de x^* , donde toma el valor de 1. Esto es:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \neq x^* \\ 1 & \text{Si } x = x^* \end{cases}$$

Nótese que este conjunto difuso así considerado no es mas que un conjunto ordinario con un único elemento dado por x^*

OTRAS TÉCNICAS CLÁSICAS

DEFUZIFICACIÓN

- CENTROIDE o MÉTODO DEL CENTRO DEL AREA (MCA): trata de calcular el centro de masa de un conjunto difuso F (centroide difuso):

$$y^* = \frac{\int_{\mathbb{R}} yF(y) dy}{\int_{\mathbb{R}} F(y) dy}$$

$$y^* = \frac{\sum_{j=1}^n F(y_j) y_j}{\sum_{j=1}^n F(y_j)}$$

Para F(y) función de membresía discreta:

OTRAS TÉCNICAS CLÁSICAS DEFUZIFICACIÓN

- MÁXIMO: MAYOR VALOR DE SALIDA Y SE LE CALCULA SU CENTROIDE

$$Y = \text{MAX} (Y_1 \rightarrow \mu(Y_1), Y_2 \rightarrow \mu(Y_2), \dots)$$

Método de Media de Máximos (MMM)

- El MMM determina el valor desdifusificado como una media de todos los valores del universo que poseen grado de membresía máximo. Esto es

$$y^* = \frac{1}{q} \sum_{j \in J^*} y_j$$

Lógica Difusa

- Ejemplo 1:

$$Y = [\text{CENTROIDE}_{\text{LENTA}} \mu_{\text{LENTA}}(Y) + \text{CENTROIDE}_{\text{MEDIA}} \mu_{\text{MEDIA}}(Y)] /$$
$$[\mu_{\text{LENTA}}(Y) + \mu_{\text{MEDIA}}(Y)] =$$
$$(10 * 0.5 + 35 * 0.2) / (0.5 + 0.2) = 17,14 \text{rpm}$$

- EJEMPLO 2:

$$\nabla u = [0.5(-1.5) + 1(0) + 0.5(1.5)] / (0.5 + 1 + 0.5) = 0$$

Definición de Fusificador

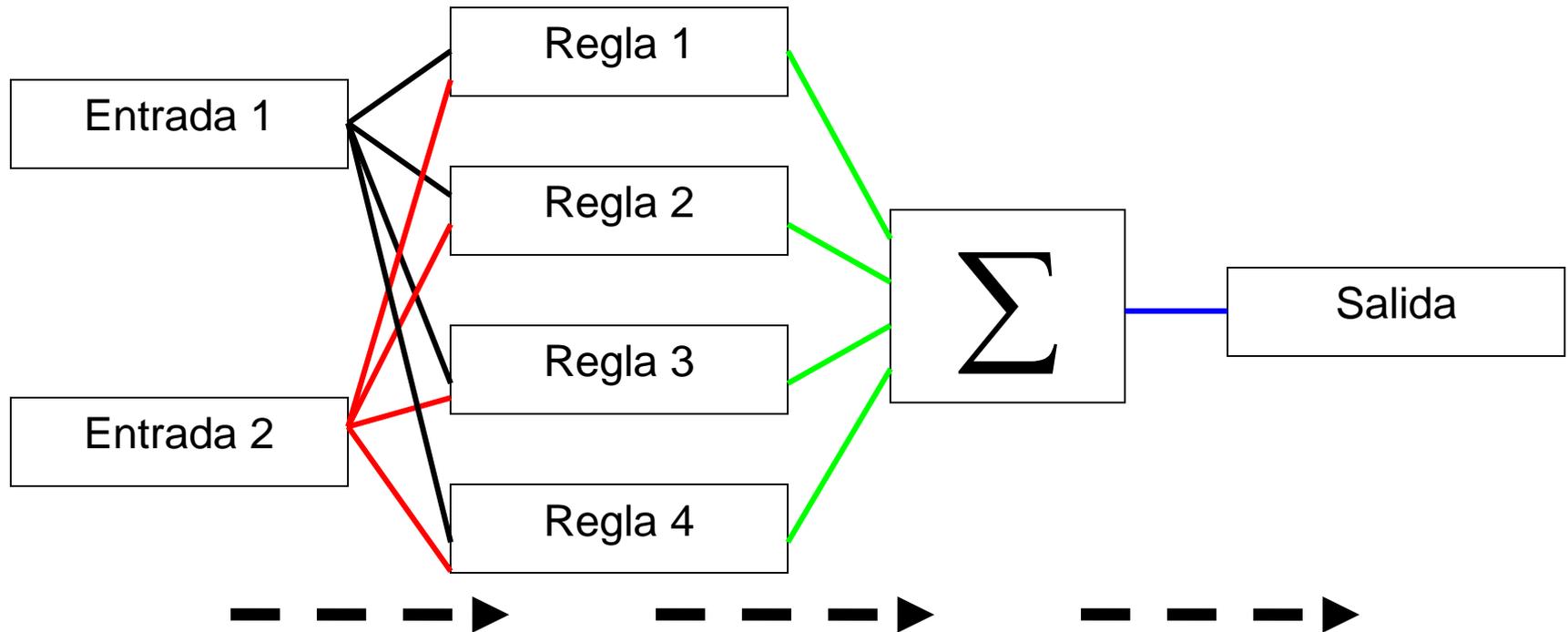
El fusificador realiza una transformación de un punto de un conjunto ordinario $X=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ a un conjunto difuso $A' \in U$.

Lógica Difusa

Pasos a seguir para aplicar la lógica difusa en un problema:

- Identificar las variables y sus posibles rangos de valores.
- Determinar las funciones de pertenencia de esos valores a expresiones descriptivas.
- Determinar las reglas que rigen el comportamiento del sistema.
- Seleccionar algún método para darle un valor preciso a los resultados descriptivos.

ESTRUCTURA DEL SISTEMA



Las entradas son números limitados a un rango específico. Entradas no difusas.

Las reglas son evaluadas en paralelo usando un razonamiento difuso.

Los resultados de las reglas son combinadas y defusificadas

El resultado es un valor numérico no difuso.

Etapas para la aplicación de las reglas de Lógica Difusa

- **Paso I: Fuzificación de las entradas**

Se deben resolver todas las sentencias en el antecedente en función de su grado de membresía entre 0 y 1.

- **Paso II: Aplicación de los operadores difusos**

Si existen múltiples partes en el antecedente se aplican los operadores fuzzy y se resuelve el antecedente como un número entre 0 y 1.

- **Paso III: Aplicación de la implicación**

El consecuente de una regla fuzzy asigna un conjunto fuzzy completo a la salida.

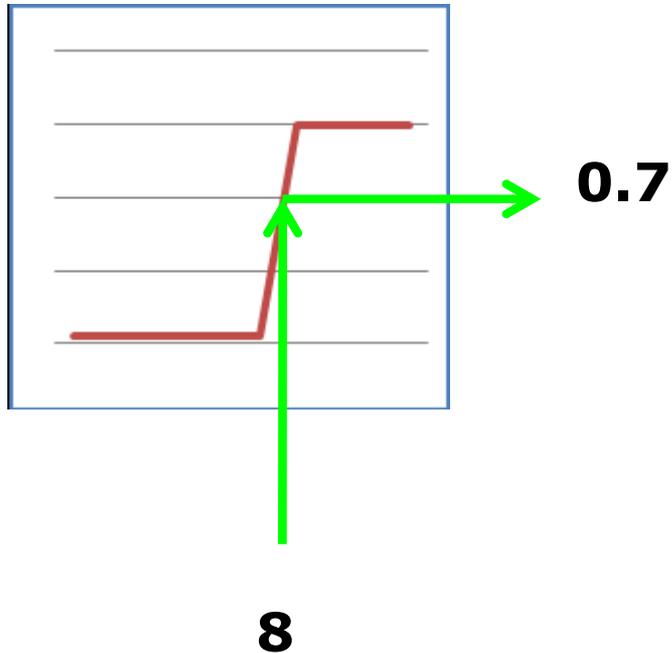
- **Paso IV: Agregación**

La salida de cada regla se “suma”.

- **Paso V: Defuzificación**

Para obtener como salida un número se aplica algún método de defuzificación.

Paso I: Fuzificación



La comida es deliciosa

Entrada = 8 = 0.7

FUSIFICACIÓN DE LAS ENTRADAS

- Para cada entrada existen diferentes conjuntos con variables lingüísticas, en nuestro caso hay dos subconjuntos para cada variable de entrada.

$$X = \{\text{BAJO}, \text{ALTO}\}$$

$$Y = \{\text{BAJO}, \text{ALTO}\}$$

- Las variables de entrada X e Y, al igual que la variable de salida Z pertenecen al mismo universo de discurso comprendido en el rango entre 0 y 10.
- Las funciones de membresía son:

$$\text{BAJO}(T) = 1 - (T / 10)$$

$$\text{ALTO}(T) = T / 10$$

Paso II: Aplicación del operador difuso

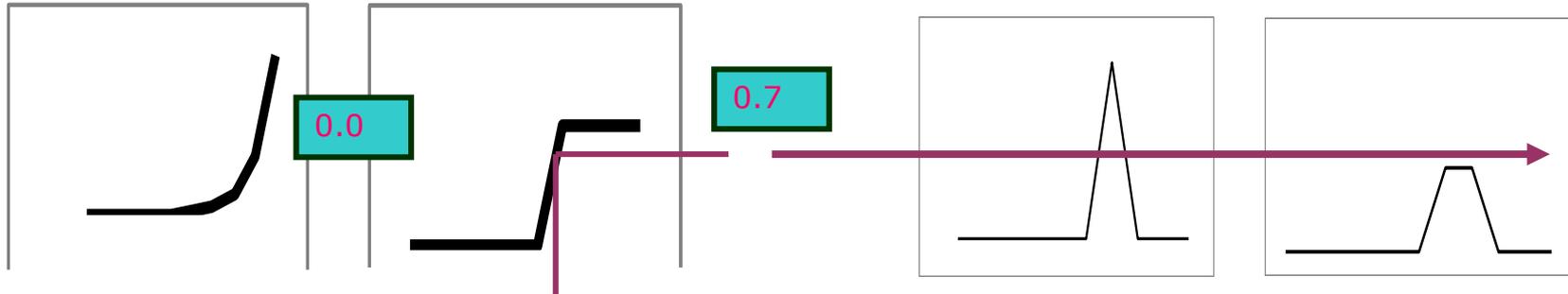
Para una regla

ANTECEDENTE

Fuzificación de entradas Operador OR (max)

CONSECUENTE

Operador de implicación (min)



Servicio es excelente OR comida es deliciosa

Propina generosa Resultado Implicación

Servicio = 3

Entrada 1

Comida = 8

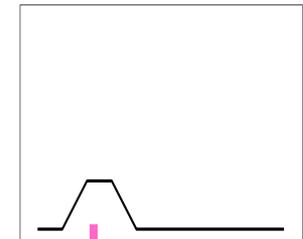
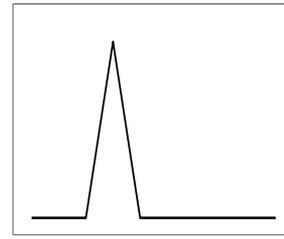
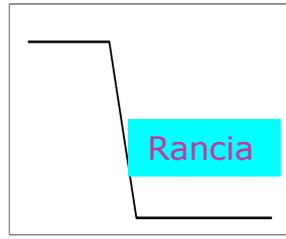
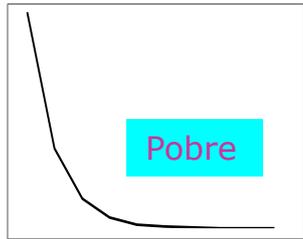
Entrada 2

APLICAR EL OPERADOR DIFUSO

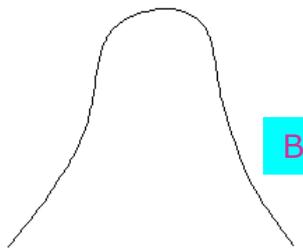
- Una vez que las entradas han sido fusificadas, conocemos el grado en el cual cada parte del antecedente ha sido satisfecho para cada regla.
- Sí el antecedente de una regla dada tiene más de una parte, el operador difuso es aplicado para obtener un número que represente el resultado del antecedente para esa regla.
- Para la operación AND existen dos formas conocidas como min (mínimo) y prod (producto algebraico).
- Para la operación OR existen dos formas conocidas como max (máximo) y sum (suma algebraica).
- Además de estos métodos de construcción, uno puede crear su propio método para AND y OR escribiendo cualquier función.

Paso III: Aplicación del método de Implicación

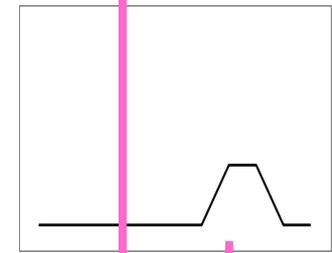
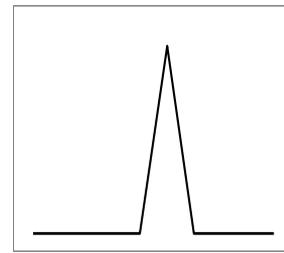
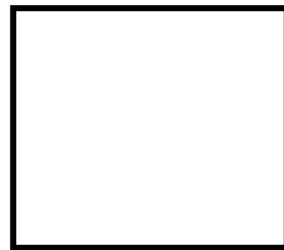
Para todas las reglas



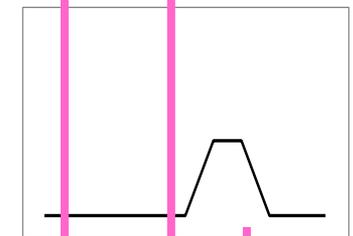
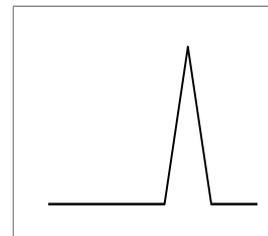
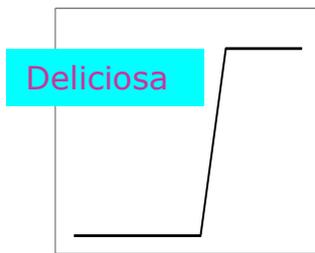
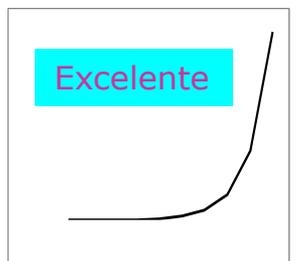
Servicio es pobre o comida rancia → propina baja



Buena



Servicio es bueno → propina media



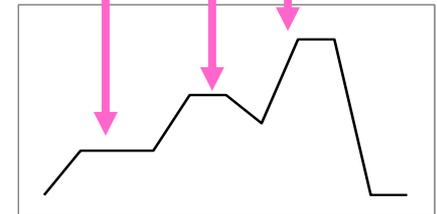
Servicio excelente o comida deliciosa → propina generosa

Servicio = 3

Entrada 1

Comida = 8

Entrada 2



METODO DE IMPLICACION

- Un consecuente es un conjunto difuso representado por una función de membresía, en nuestro caso tiene asignada dos, las cuales son:

$$Z = \{ \text{BAJO, ALTO} \}$$

- Hay dos métodos conocidos que son las mismas funciones usadas por el método AND: min (mínimo), que trunca el conjunto difuso de salida, y el PROD (producto), el cual escala al conjunto difuso de salida.

- El grado de verdad de la premisa de cada regla es computada y aplicada al consecuente de cada regla. Este resultado es un subconjunto difuso que será asignado a cada variable de salida correspondiente. Nosotros aplicamos en este ejemplo el método de Mamdani ó método de inferencia MIN-MAX. Para cada regla hacemos el MIN entre el nivel de disparo y la función de membresía de la variable de salida indicada en el consecuente.

Paso IV: Agregación

Proceso de unificación de las salidas para cada regla

La entrada:

Es la lista de salidas truncadas

La salida:

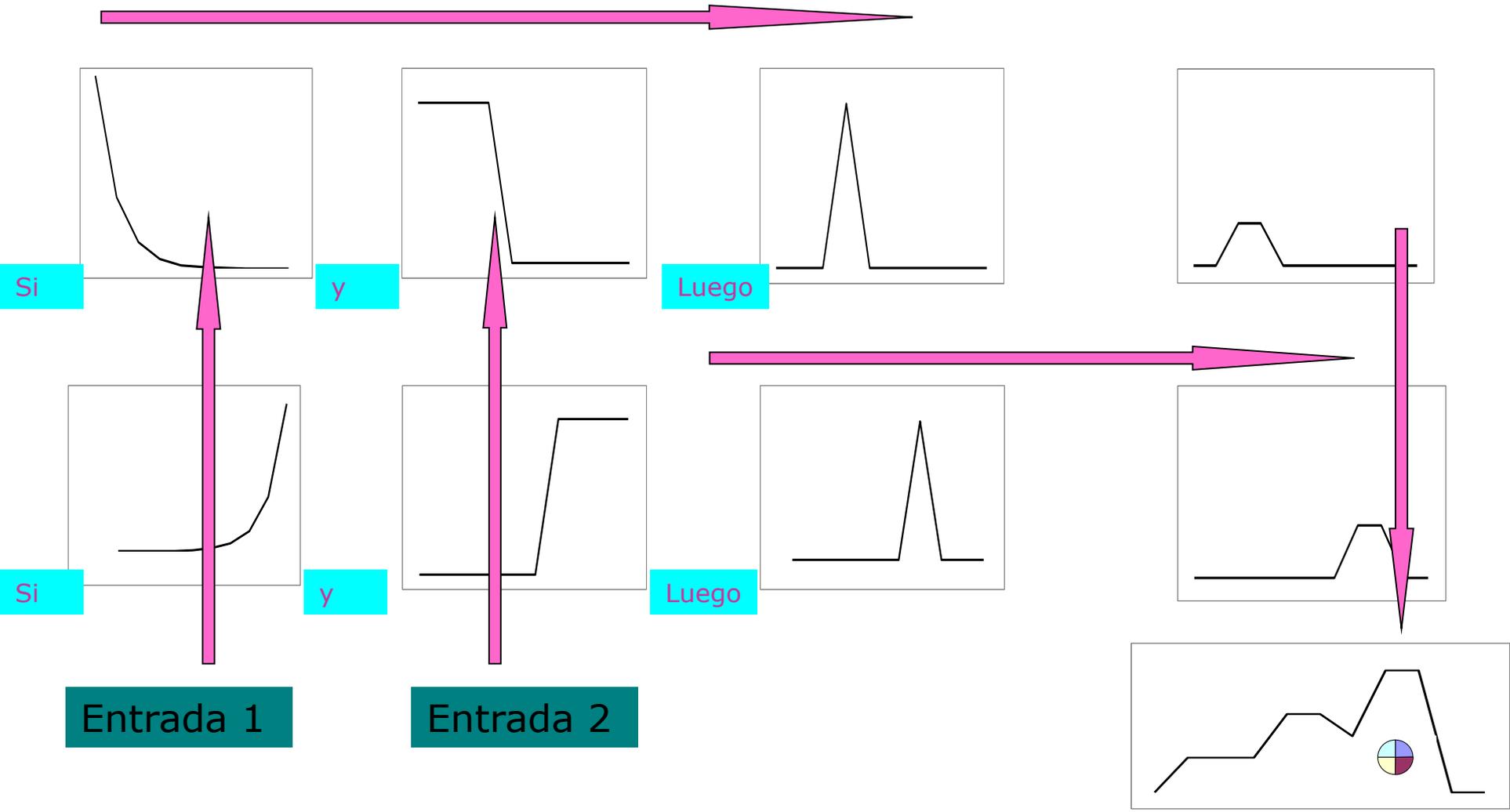
Es un conjunto difuso para cada variable de salida

Consiste en tomar un único conjunto de salida para todo el sistema a partir de los conjuntos de salida de cada regla.

METODO DE AGREGACION

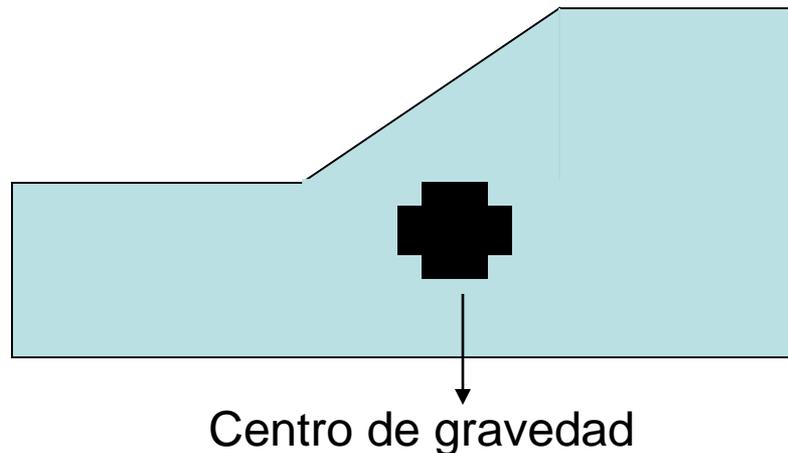
- Agregación o composición es el proceso por el cual los conjuntos difusos que representan las salidas de cada regla son combinadas en un único conjunto difuso.
- La salida del proceso de agregación es un conjunto difuso para cada salida variable.
- Los dos métodos más conocidos son: max (máximo) y sum (suma).
- Lo más común cuando usamos la función 'min' en el método de implicación es corresponder con la función 'max' en el método de agregación.
- De igual manera si elegimos la función 'prod' para el método de implicación, es usual hacerlo corresponder con la función 'sum' para el método de agregación.

Paso V: Defuzificación



DEFUSIFICACION

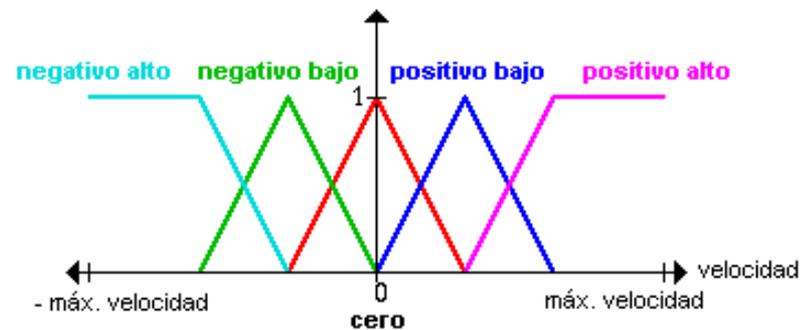
- La entrada para el proceso de defusificación es un conjunto difuso (la salida de la etapa de agregación) y la salida es un simple número concreto. Los sistemas del mundo real requieren un resultado numérico.
- El método más popular de defusificación es el cálculo del centro de gravedad ó centroide, el cual retorna el centro del área bajo la curva. Al igual que en los pasos anteriores existen más métodos de cálculo.



Ejemplo

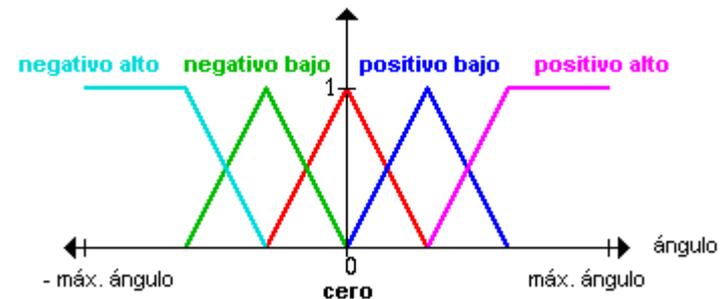
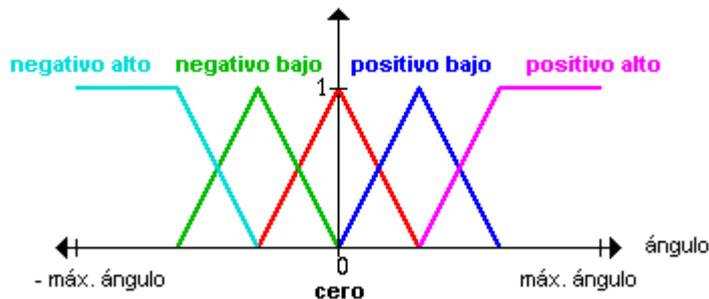
- **El péndulo invertido:** El problema está en equilibrar una pértiga sobre una plataforma móvil que puede moverse en dos únicas direcciones, a la izquierda o a la derecha.

Se define (subjetivamente) cual es la velocidad del andén: alta, baja, etc.



Ejemplo

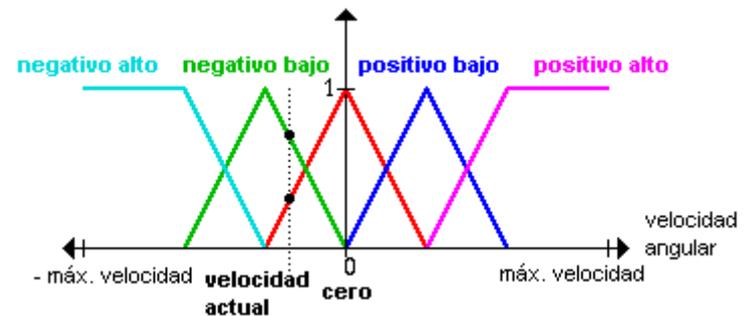
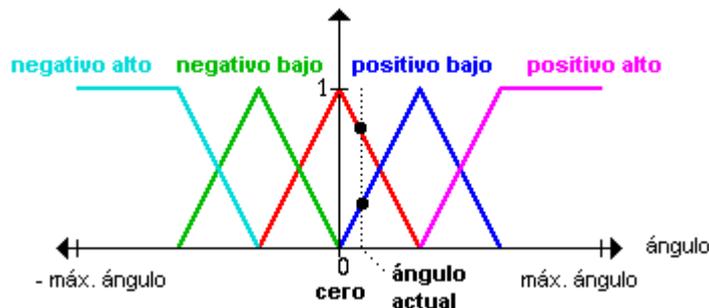
- Lo mismo se hace para el ángulo entre la plataforma y la pértiga, y la velocidad angular de este ángulo:



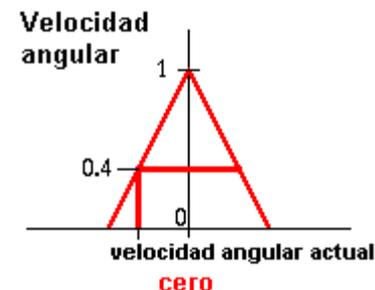
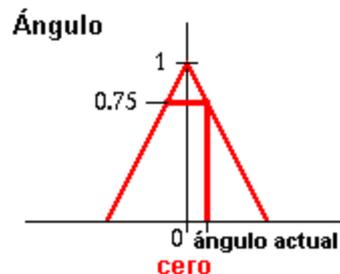
- Algunas reglas del sistema difuso
 - Si el ángulo es cero y la velocidad angular es cero **entonces** la velocidad será cero.
 - Si el ángulo es cero y la velocidad angular es positiva baja **entonces** la velocidad será positiva baja.

Ejemplo

Consideremos un valor actual para el ángulo y velocidad angular

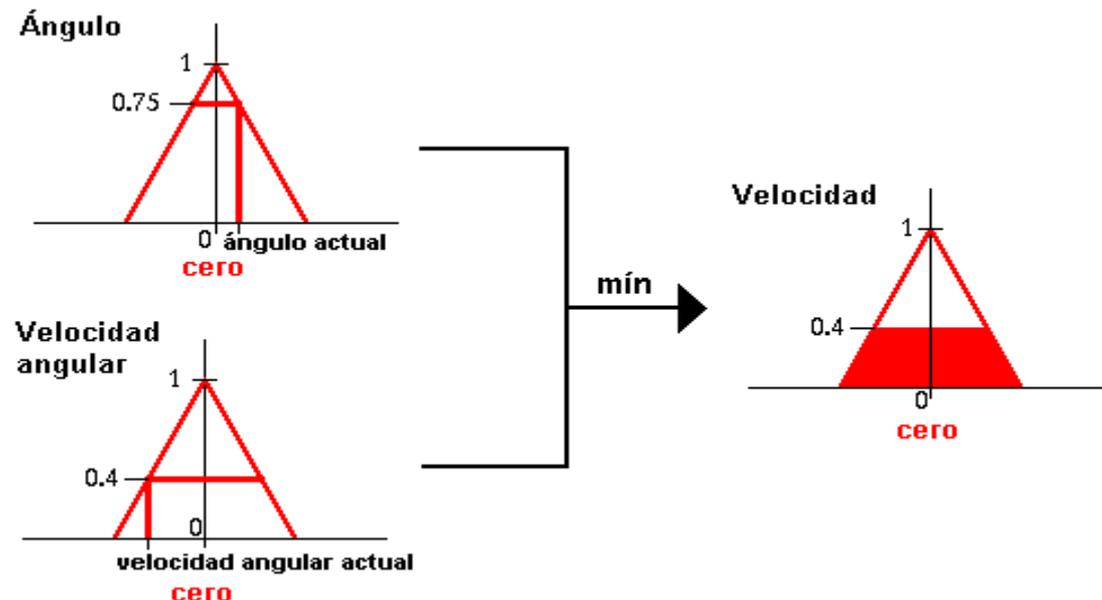


- Veamos como aplicar una regla
 - Si el ángulo es cero y la velocidad angular es cero entonces la velocidad será cero.



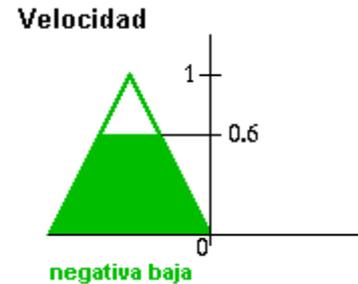
Ejemplo

- Como las dos partes de la condición de la regla están unidas por una Y (operación lógica AND), calculamos el $\min(0.75, 0.4) = 0.4$ y cortamos el conjunto borroso "cero" de la variable "velocidad" a este nivel (según nuestra regla):

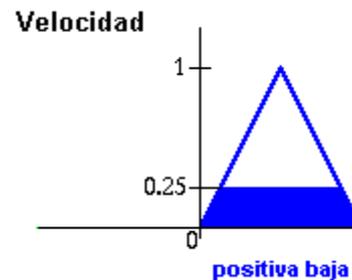


Ejemplo

- Por su parte, el resultado de las reglas
 - Si el ángulo es cero y la velocidad angular es negativa baja entonces la velocidad será negativa baja

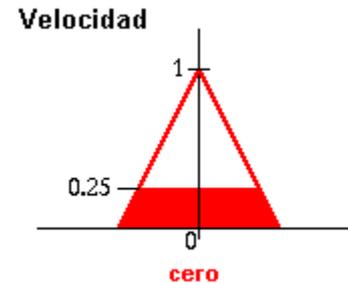


- Si el ángulo es cero y la velocidad angular es positiva baja entonces la velocidad será positiva baja

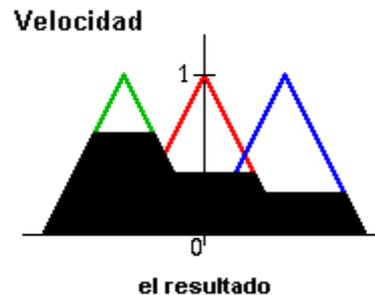


Ejemplo

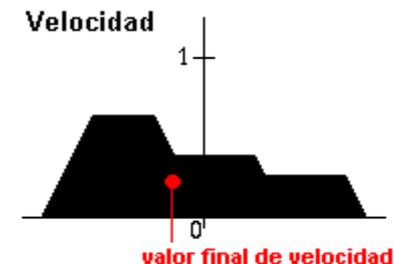
- Si el ángulo es positivo bajo y la velocidad angular es negativa baja entonces la velocidad será cero



- Estas cuatro reglas solapadas desembocan en un resultado único:



Tenemos que escoger un valor representativo como salida final usando alguno de los métodos de defuzzification



CASO DE ESTUDIO 2

SISTEMA CLASIFICADOR DE LIRIOS

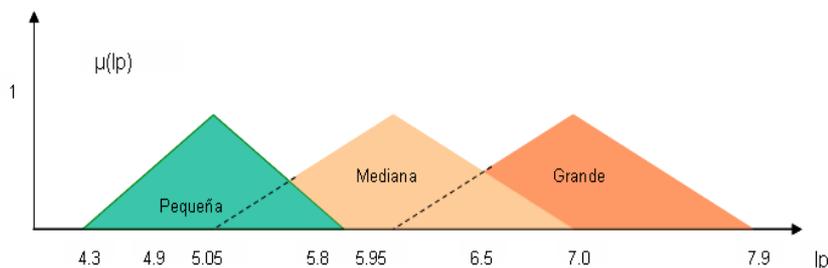
- Clasificar correctamente las variedades de flor Iris (Lirios), respecto a las clases: **setosa**, **virgínica** y **versicolor**.
- Los atributos utilizados para la clasificación son la **longitud y ancho** de los pétalos, y el **largo y ancho** de los tallos.

Variables

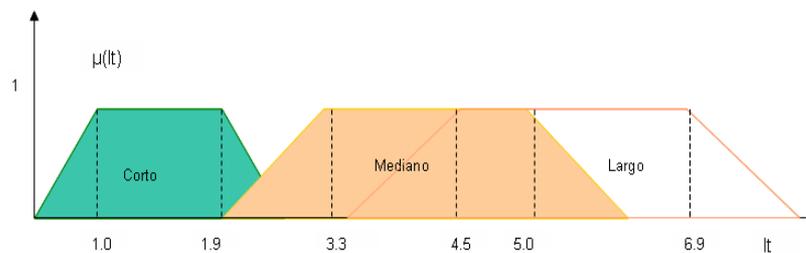
- Variables de entrada: ancho del pétalo (ap), longitud del pétalo (lp), ancho del tallo (at) y longitud del tallo (lt).
- Variables de salida: Clase.

CASO DE ESTUDIO 2

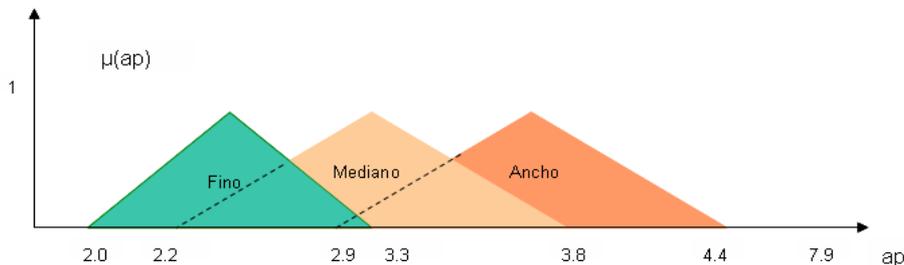
SISTEMA CLASIFICADOR DE LIRIOS



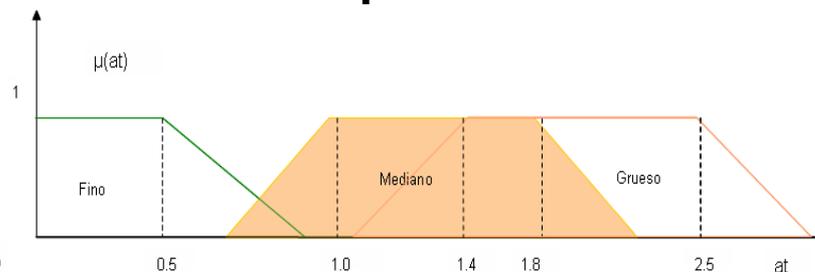
Funciones de pertenencia para lp



Funciones de pertenencia para lt



Funciones de pertenencia para ap



Funciones de pertenencia para at

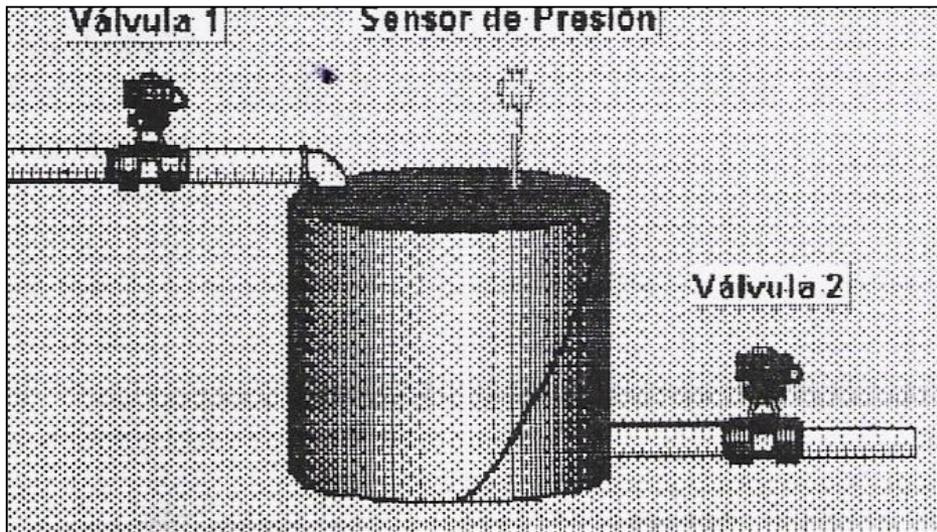
CASO DE ESTUDIO 2

SISTEMA CLASIFICADOR DE LIRIOS

1. Si l_p es Pequeña Y a_p es Ancho Y l_t es Corto Y a_t es Fino Entonces Clase es Setosa.
2. Si l_p es Mediano Y a_p es Fino Y l_t es Mediano Y a_t es Mediano Entonces Clase es Virgínica.
3. Si l_p es Grande Y a_p es Mediano Y l_t es Largo Y a_t es Largo Entonces Clase es Versicolor.
4. Si l_p es Grande Y a_p es Fino Y l_t es Largo Y a_t es Grande Entonces Clase es Versicolor.
5. Si l_p es Mediano Y a_p es Mediano Y l_t es Mediano Y a_t es Mediano Entonces Clase es Virgínica.
6. Si l_p es Pequeña Y a_p es Mediano Y l_t es Fino Y a_t es Fino Entonces Clase es Setosa.

CASOS DE ESTUDIO 3

SISTEMA DE CONTROL PARA UN TANQUE



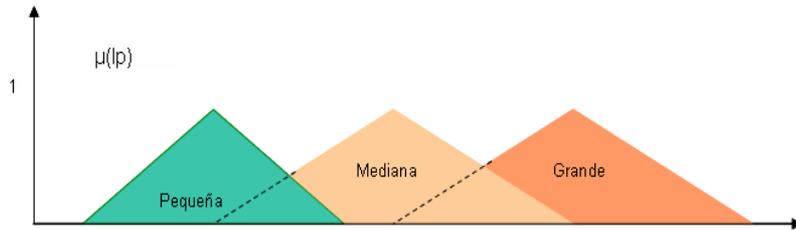
Las variables en el sistema son:
Variables de entrada: presión, válvula 1 y válvula 2.

Variables de salida: válvula 1 y válvula 2.

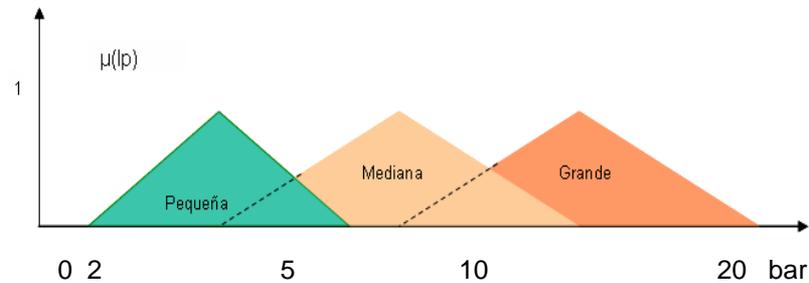
Válvula 1 y Válvula 2: tipo Enumerado, con valores difusos de apertura: mediana, grande, pequeña.

Presión: tipo entero, con un rango de variación entre 0 y 20, con valores difusos de presión: mediana, grande, pequeña.

CASOS DE ESTUDIO 3



**Funciones de pertenencia para
válvulas**



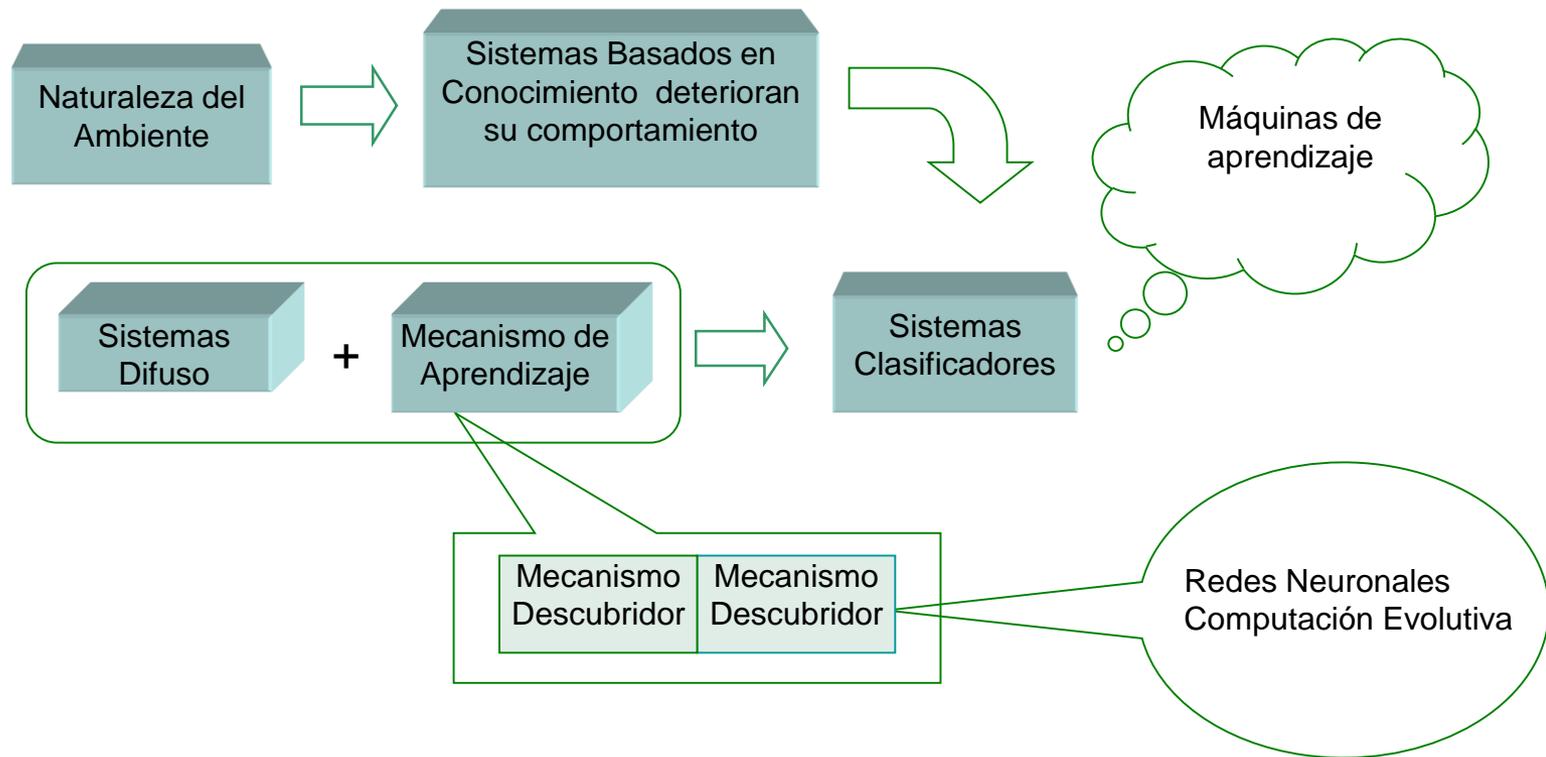
**Funciones de pertenencia para
presión**

CASOS DE ESTUDIO 3

SISTEMA DE CONTROL PARA UN TANQUE

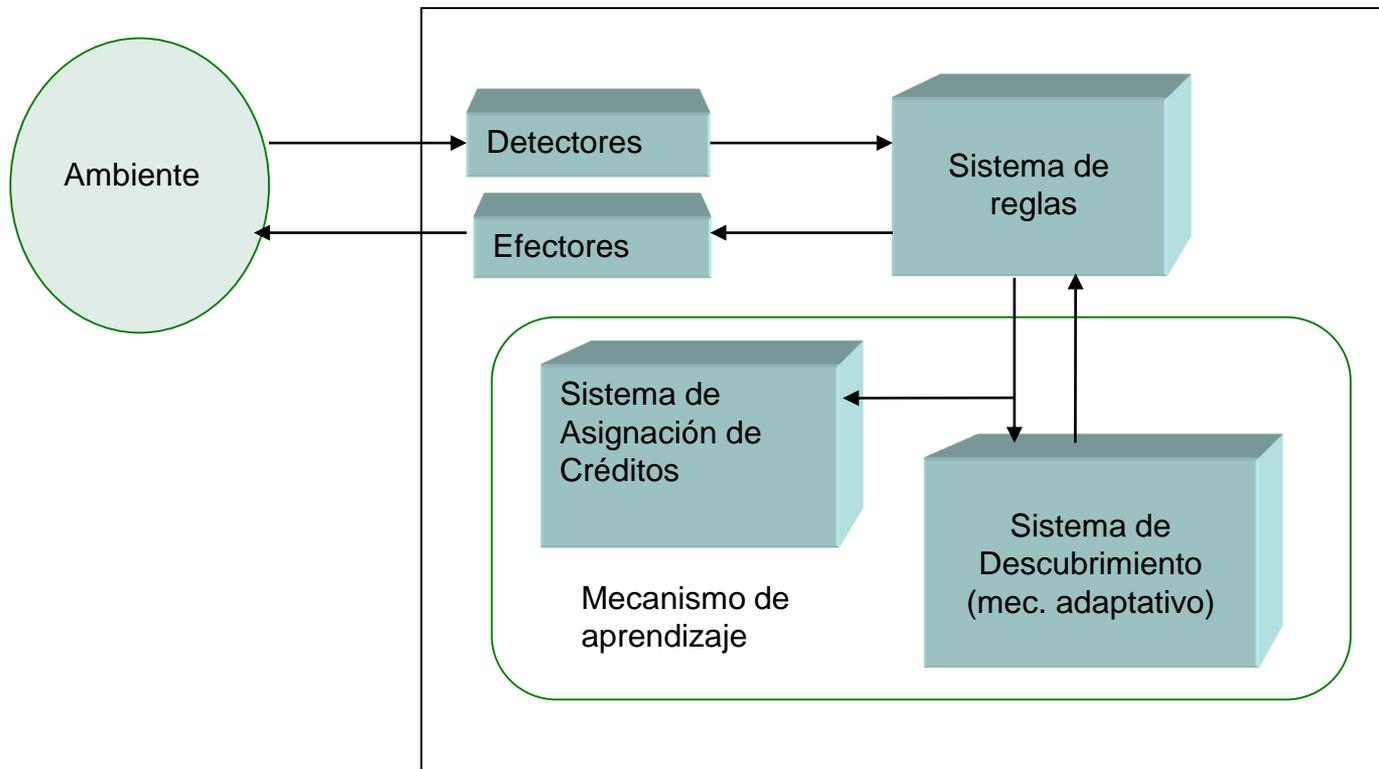
1. Si Valvula1 == grande Y Valvula2 == grande Y Presión < 5 Entonces Valvula1 = mediana Y Valvula2 = pequeña.
2. Si Valvula1 == mediana Y Valvula2 == grande Y Presión > 10 Entonces Valvula1 =pequeña Y Valvula2 = grande.
3. Si Valvula1 == grande Y Valvula2 ==mediana Y Presión > 10 Entonces Valvula1 =pequeña Y Valvula2 = mediana.
4. Si Valvula1 == grande Y Valvula2 == mediana Y Presión >= 5 Y Presión <=10 Entonces Valvula1 = grande Y Valvula2 = pequeña.
5. Si Valvula1 == pequeña Y Valvula2 == grande Y Presión < 5 Entonces Valvula1 = grande Y Valvula2 = pequeña.
6. Si Valvula1 == pequeña Y Valvula2 == grande Y Presión < 5 Entonces Valvula1 = grande Y Valvula2 = pequeña.

Máquinas de Aprendizaje



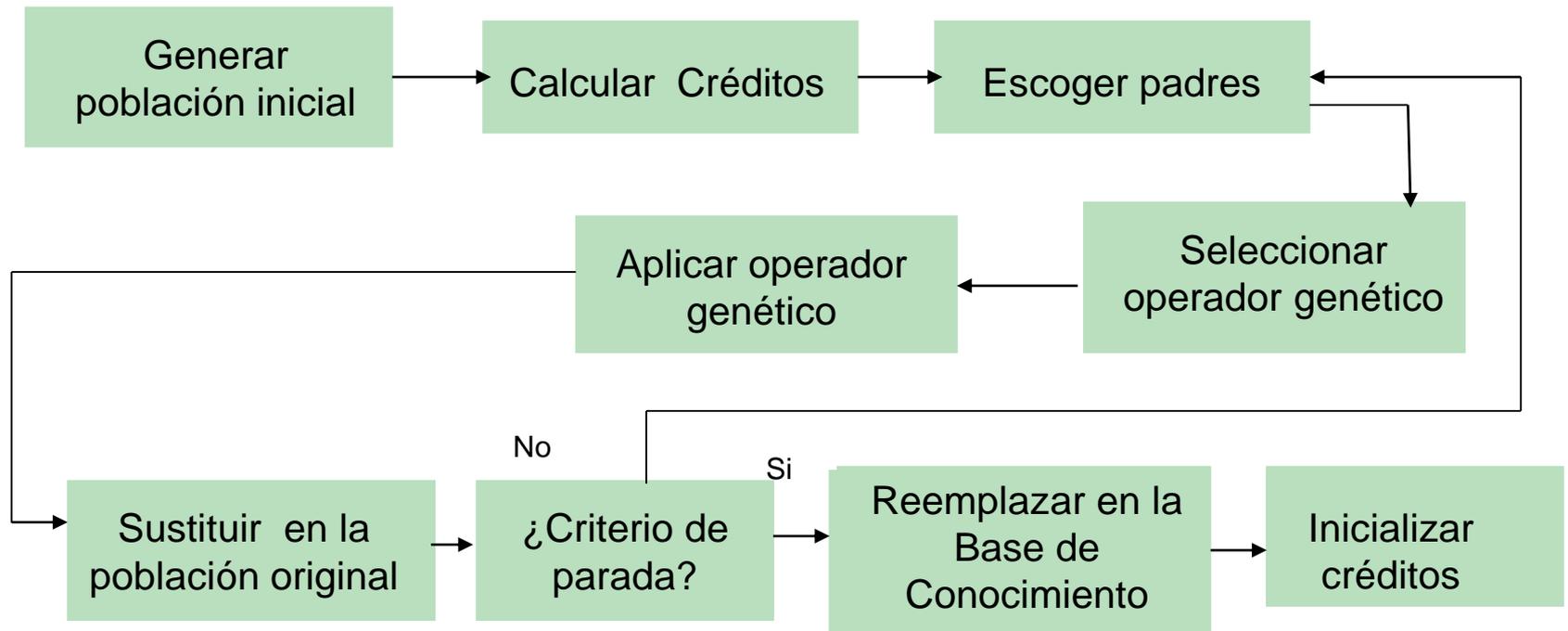
SISTEMAS CLASIFICADORES

Aprendizaje

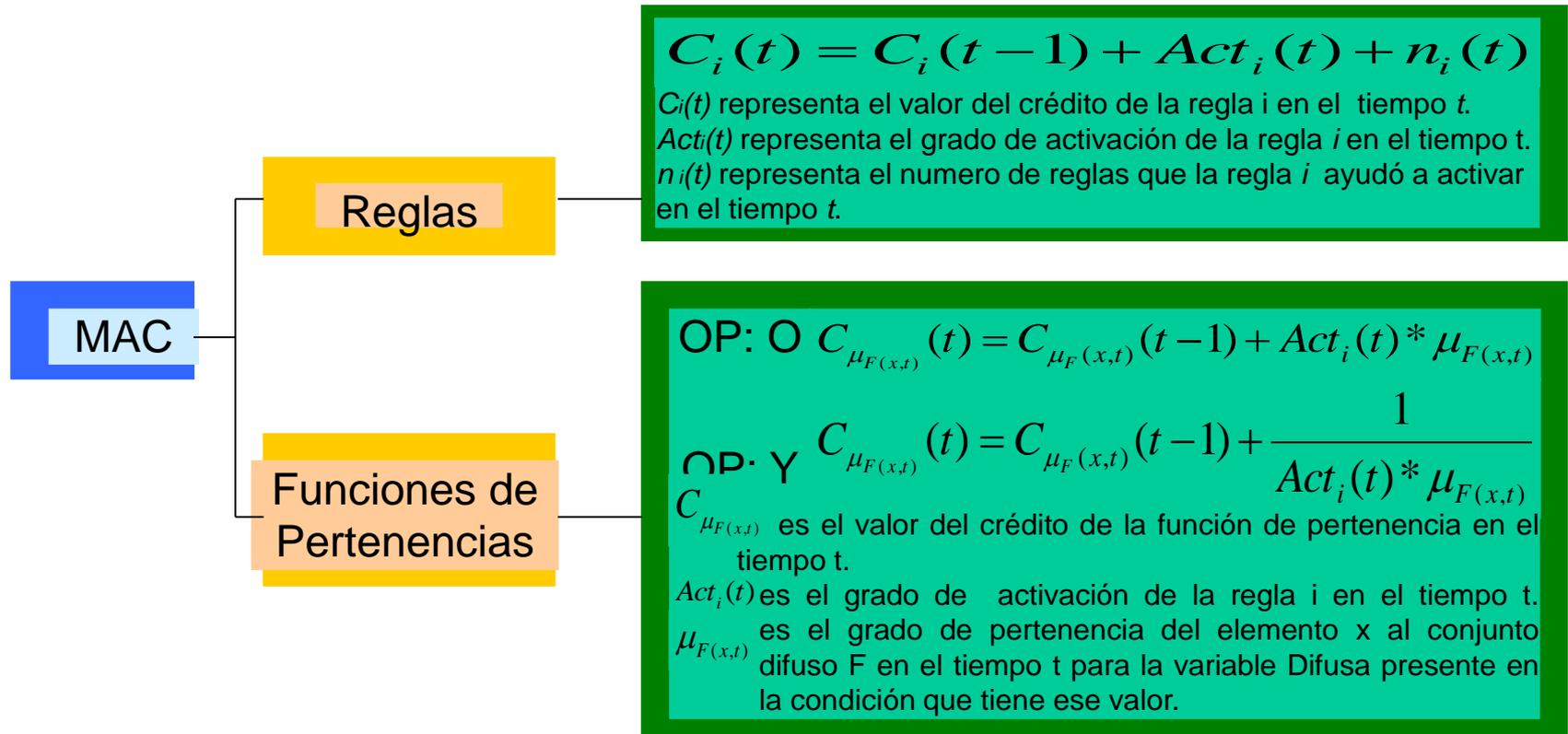


Aprendizaje

EVOLUCIÓN DE REGLAS



Aprendizaje en SCD



Sist. Clasificador Difuso

1. Calcular el **grado de activación** de c/regla.
2. Calcular el **crédito** de c/regla activada.
3. **Defuzificar** la salida obtenida del sistema difuso por el mecanismo de inferencia difuso.
4. Calcular el **error de identificación** er .
5. Calcular el error promedio ep , para todos los **patrones procesados**.
6. Si ep es mas grande que el error limite dado por el usuario, entonces el SCD usa el **mecanismo adaptativo** basado en AGs.
 - 6.1 **Escoger** como padres las reglas con alto créditos valor).
 - 6.2 Aplicar los **operadores genéticos**.
 - 6.3 **Reemplazar** los individuos viejos por nuevos, según algún mecanismo de reemplazo.

Sist. Clasificador Difuso

- Error de identificación para cada patrón.

$$er = |(y_s - y_d)/y_s|$$

$$ep = \sum_{i=1}^m er/m$$

y_s salida sistema real y_d salida modelo, m número de of patrones.

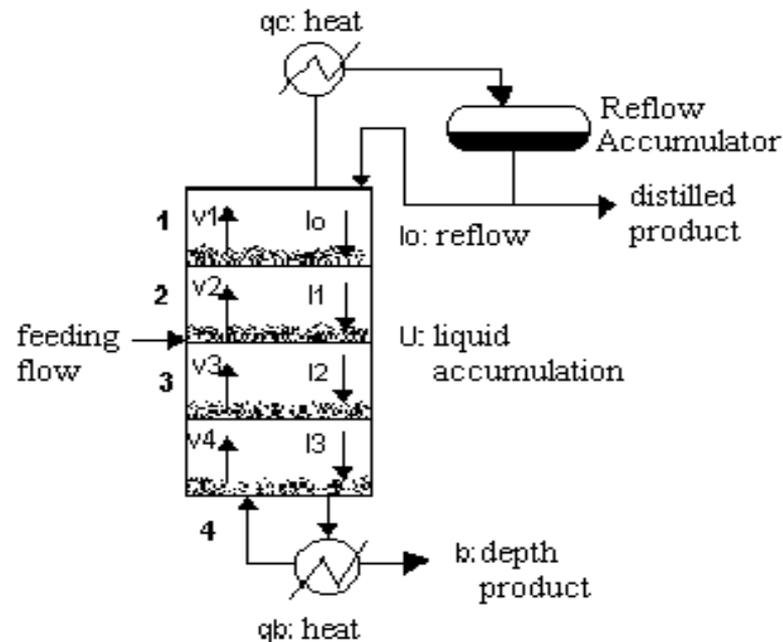
- Función de calidad

- $S_i(t+1) = S_i(t) + Act_i(t) * \mu y_i / ea$ (3)

$Act_i(t)$ grado de activación regla i en tiempo t , ea es el error absoluto ($ea = y_s - y_d$) y μy_i es el grado de membrecía.

EJEMPLO

- **Sistema de destilacion:** separar 2 mezclas en varias fracciones con diferentes puntos de ebullicion.



EJEMPLO

- Señal de entrada constante con un paso de amplitud=10 ($U(t) = 10$).
- Modelo teórico:

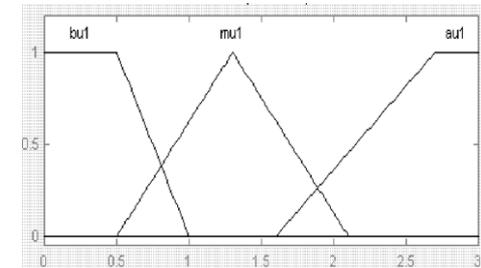
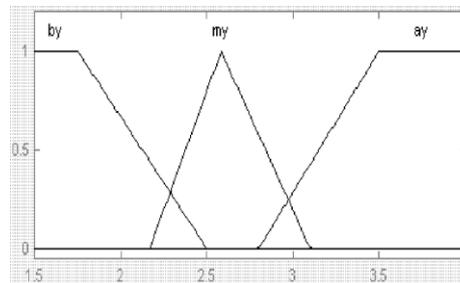
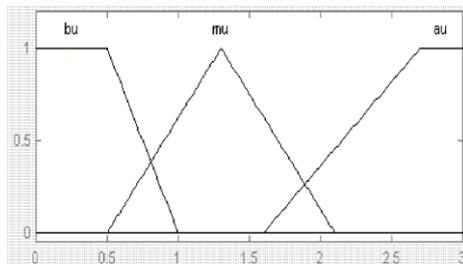
$$Y(t) = 1.1148*Y(t-1) + 0.2525*Y(t-2) - 0.3823*Y(t-3) + 0.3294e-4*U(t-1)$$

EJEMPLO

- Estructura regla genérica:

If $U(t)$ and $Y(t-1)$ then $Y(t)$

- Función de Membrecía de $U(t)$, $Y(t-1)$ y $Y(t)$.



EJEMPLO

- Se encontró para 87 iteraciones, mejor modelo difuso (min ep):

If $U(t)$ is mu and $Y(t-1)$ is $bu1$ then $Y(t)$ is ay

If $U(t)$ is au and $Y(t-1)$ is $mu1$ then $Y(t)$ is by

If $U(t)$ is mu and $Y(t-1)$ is $au1$ then $Y(t)$ is my

If $U(t)$ is au and $Y(t-1)$ is $au1$ then $Y(t)$ is ay

If $U(t)$ is mu and $Y(t-1)$ is $mu1$ then $Y(t)$ is ay

If $U(t)$ is au and $Y(t-1)$ is $au1$ then $Y(t)$ is my

If $U(t)$ is mu and $Y(t-1)$ is $bu1$ then $Y(t)$ is my

If $U(t)$ is bu and $Y(t-1)$ is $mu1$ then $Y(t)$ is my

If $U(t)$ is mu and $Y(t-1)$ is $mu1$ then $Y(t)$ is by