UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
MERIDA VENEZUELA

# Aspectos básicos de los sistemas lógicos difusos

Jose Aguilar Castro

CEMISID

# Justificación

**Aquellos casos en los cuales la complejidad del problema y su carácter dinámico, o las incertidumbres alrededor del mismo, hacen difícil el establecimiento detallado de especificaciones.**

**Parecen ser apropiados adoptar enfoques que usen el aprendizaje por medio de la experiencia o el razonamiento heurístico para la toma de decisiones que permitan producir "soluciones confiables"**

# Lógica Difusa

- En la lógica clásica una proposición sólo admite dos valores: puede ser verdadera o falsa.

**Lógica binaria**

- Existen otras lógicas que admiten un tercer valor:

**posiblemente**

- La lógica difusa (o borrosa) es una de ellas, que se caracteriza por querer **cuantificar** esta incertidumbre

# Lógica difusa

- Los conjuntos difusos fueron introducidos como una forma matemática de representar la "vaguedad" de la vida cotidiana.
- La idea fundamental es la de desarrollar un marco de trabajo para el tratamiento de la imprecisión.
- Nació alrededor del año 1965 con los trabajos de Zadeh en los Estados Unidos, en los cuales aplicó la lógica multi-valuada a la teoría de conjuntos.

# Lógica Difusa

- Zadeh introdujo el uso de una función, que expresaba el grado de pertenencia (o membresía) de los elementos a un conjunto dado, con valores en el rango entre 0 y 1.

- Estos últimos años ha tenido un gran interés en la comunidad científica a raíz de los avances en lógica difusa, los algoritmos difusos, el control difuso, el razonamiento difuso, etc.

# Antecedentes de Lógica difusa

- En 1970 emergió el diseño de controladores lógicos difusos basados en reglas, gracias al trabajo de E. Mandami y sus colaboradores, quienes desarrollaron un sencillo y eficiente controlador para una máquina de vapor.

El trabajo de Mamdani abrió el camino para la implantación exitosa de sistemas lógicos difusos.

# Hitos

- J. **LUKASIEWICZ (AÑOS 20) ->**

  PRINCIPIOS LÓGICA MULTIVALUADA

- **L. ZADETH (1965) ->**

  APLICACIÓN DE LA LÓGICA MULTIVALUADA A LA TEORÍA DE CONJUNTOS

- **E. MAMDANI (MEDIADOS 70) ->**

  PRIMERA APLICACION: CONTROLADOR BORROSO

# Áreas de aplicación de la L.D.

- Actualmente, existen una gran cantidad de compañías de software comercial e industrial que están desarrollando programas basados en ésta teoría, especialmente en Japón.

- El área de mayor aplicación ha sido en control difuso de características físicas o químicas, tales como temperatura, corriente eléctrica, flujo de líquidos, etc.

# Áreas de aplicación de la L.D.

| Productos de Consumo | Automóviles y generación eléctrica | Procesos Industriales | Robótica y Manufactura |
|---|---|---|---|
| Cámaras y filmadoras (Cannon, Minolta, Ricoh, Sanyo)<br>Lavadoras (Gldstar, LG, Whirpool)<br>Refrigeradoras<br>Aspiradoras | Control de vehículos (Nissan)<br>Control de trasmisión (Mitsubishi, Mazda, Honda) | Refinación<br>Destilación<br>Plantas petroquímicas<br>Incineración<br>Producción de cemento | Robots (mitsubishi)<br>Reconocimiento de patrones y Visión por ordenador |

# Áreas de aplicación

- Los sistemas basados en lógica difusa imitan la forma en que toman decisiones los humanos, con la ventaja de ser mucho más rápidos.
- Son generalmente robustos y tolerantes a imprecisiones y ruidos en los datos de entrada.
- En la lógica difusa, se usan modelos matemáticos para mapear nociones subjetivas, como *caliente*/*tibio*/*frío*, a valores concretos que puedan ser manipuladas por los computadores.
- La lógica difusa se utiliza cuando la complejidad del proceso en cuestión es muy alta y no existen modelos matemáticos precisos: procesos altamente no lineales, cuando se envuelven definiciones/conocimiento no estrictamente definidos (o subjetivos).

# LA BORROSIDAD

Por borrosidad entendemos el hecho de que una proposición pueda ser parcialmente verdadera y parcialmente falsa de forma simultánea.

- Replanteamiento radical de conceptos clásicos de verdad y falsedad, por el concepto de vaguedad o borrosidad. La verdad y/o falsedad no son más que casos extremos.

- Una persona no será simplemente alta o baja, sino que participará de ambas características parcialmente, mientras que en la zona intermedia de ambas alturas existirá una gradualidad por la que va dejando de ser alta.

- El concepto de borrosidad está enraizado en la mayor parte de nuestros modos de pensar y hablar.

# Lógica Difusa

## DIFERENCIAS ENTRE PROBABILIDAD Y BORROSO:

*PROBABILIDAD:*

- NÚMERO ENTRE 0 Y 1 PARA EXPRESAR LA POSIBLE OCURRENCIA DE UN EVENTO (NO HA OCURRIDO).
- SUPONE TENER UN MODELO DEL MUNDO.
- ES BASADA EN FRECUENCIAS HISTORICAS

*BORROSO:*

- GRADO DE POSIBILIDAD QUE UN PREDICADO SEA CIERTO.
- NO SE CONOCE MODELO DEL MUNDO.
- USA DESCRIPCIONES Y DESCRIBE EL MUNDO

# Lógica Difusa

## LÓGICA MULTIVALUADA EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS

=> GRADOS DE PERTENENCIA

=> CLASES CON LÍMITES MAL DEFINIDOS

$\Rightarrow$ GRADUALIDAD EN LOS CAMBIOS DE ESTADOS

$\Rightarrow$ ETIQUETAS LINGUISTICAS

# Conjuntos difusos

Un conjunto difuso posee como lógica subyacente una lógica multivaluada, y permite la descripción de conceptos en los cuales la transición entre poseer una propiedad y no poseerla, no son claros.

# Lógica Difusa

- **Conjuntos difusos:** generalización de los conjuntos ordinarios, pero agregándoles un grado de pertenencia a cada elemento.
- **Grado de pertenencia** varia entre 0 y 1.
  - **0** significa que ese elemento no pertenece a un conjunto dado,
  - **1** significa que el elemento pertenece 100% a ese conjunto.

# Definición de conjunto ordinario

Sea X un universo y sea S un subconjunto de X.

La función característica asociada con S es un mapa:

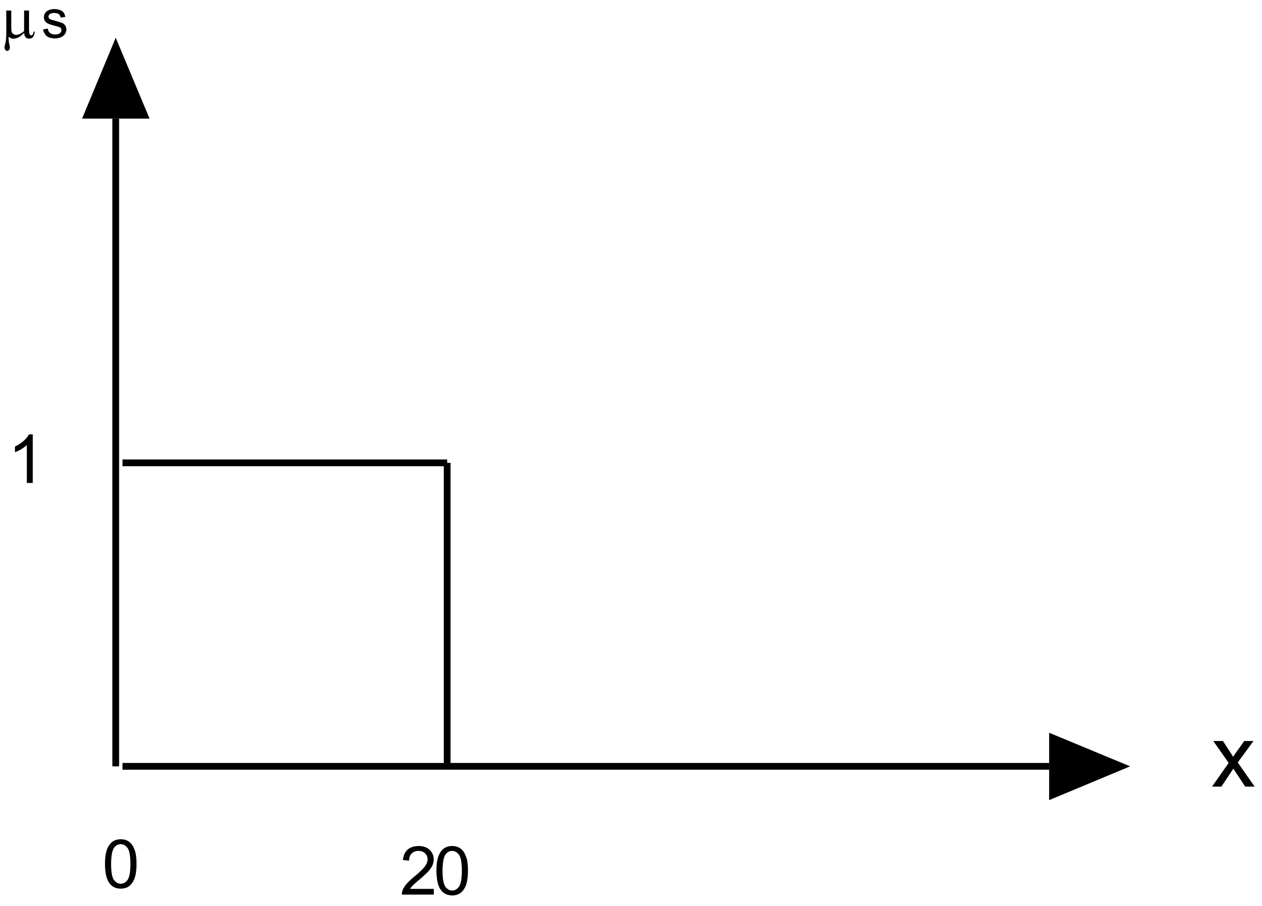
$$\mu_s : X \rightarrow \{0,1\}$$

tal que para cualquier elemento *x* del universo X,

$\mu_s(x) = 1$ si x es un miembro de S

$\mu_s(x) = 0$ si x no es un miembro de S

# Ejemplo de conjunto ordinario



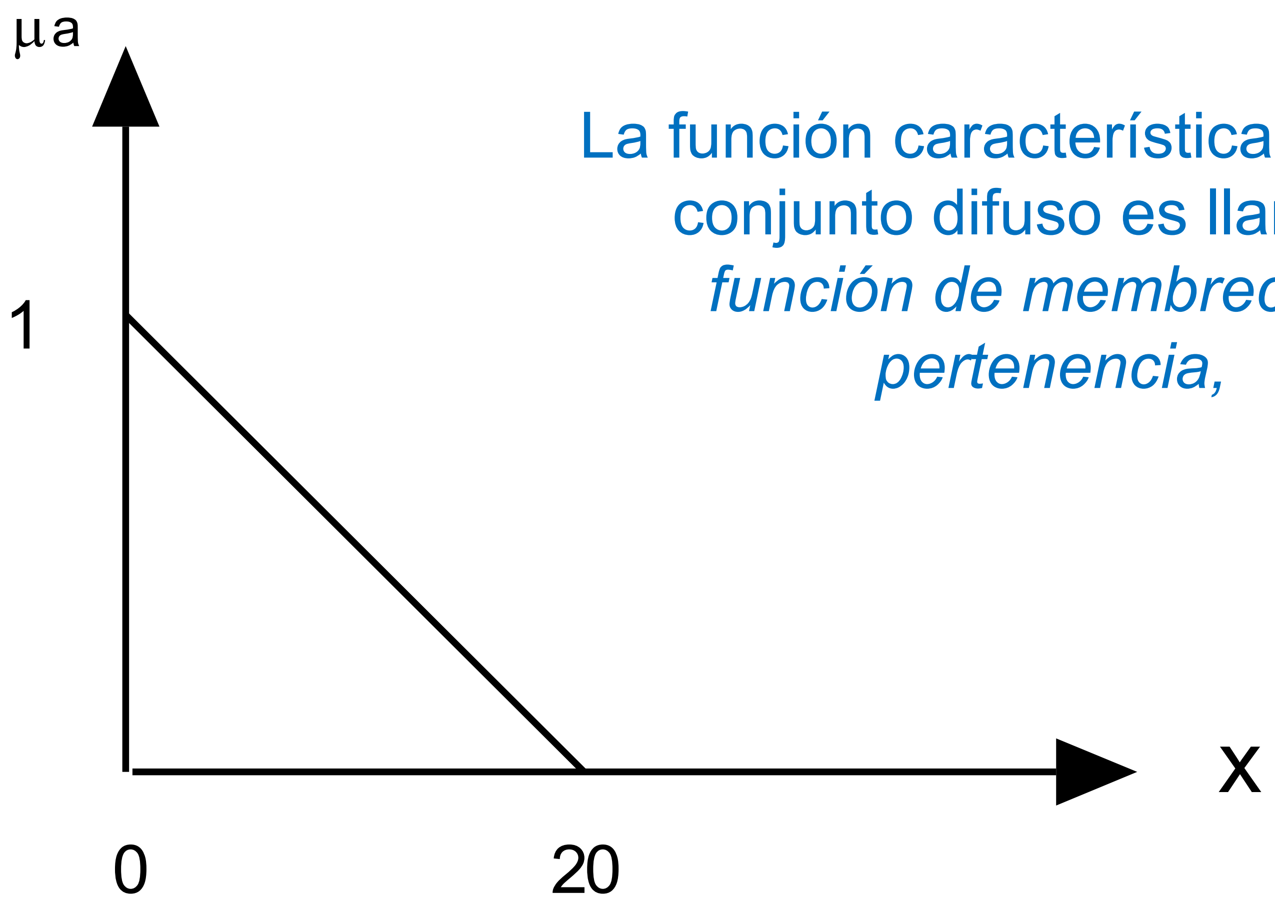
# Definición de conjunto difuso

Sea X un conjunto que representa un universo. Un subconjunto difuso A del universo X esta asociado a una función característica.

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

$\mu_A(x)$ indica el grado con el cual el elemento *x* del universo X es miembro del conjunto A

# Ejemplo de conjunto difuso




La función característica de un conjunto difuso es llamada *función de membrecía o pertenencia,*

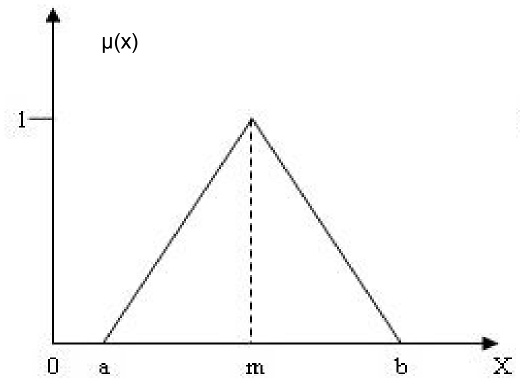
# Lógica Difusa

## Representación de los conjunto difuso

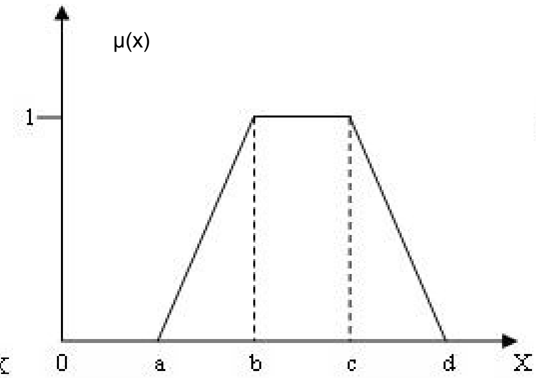
**A={x/ $\mu_A(x)$ para x $\in$ X},** donde x es un elemento, $\mu_A(x)$ define la función de pertenencia y X es el Universo.

- **Función de pertenencia para un conjunto:** define el grado de pertenencia de cada elemento a ese conjunto.

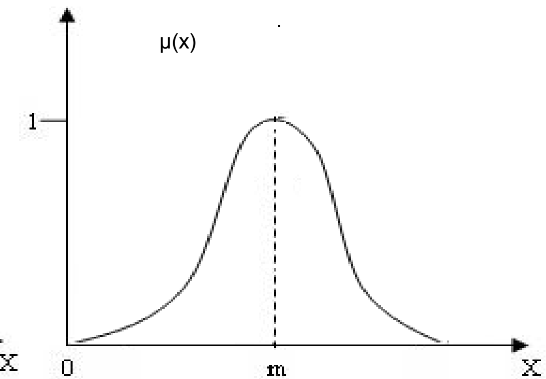
# Ejemplos de funciones de membrecía




Triangular




Trapezoidal




Gaussiana

$$\mu_A(x) = \exp\left(\frac{-(x-\mu_A(x))^2}{2\sigma_A{}^2}\right)$$

Donde σ permite cambiar la forma

# Ejemplo de Conjunto Difuso

- U es universo recurso EDAD [0,120]

  $U=\{x/x \in [0, 120]\}$

- Conjunto difusos joven y viejo

  $Joven=\{(x/1,\ 0 \leq x \leq 40\} \cup \{x/1+(x-40)^{2}/40)^{-1},\ x>40)\}$

  $Viejo=\{(x/0,\ 0 \leq x \leq 40\} \cup \{x/1+(x-40)^{2})^{-1},\ x>40)\}$

# Nomenclatura de conjuntos difusos

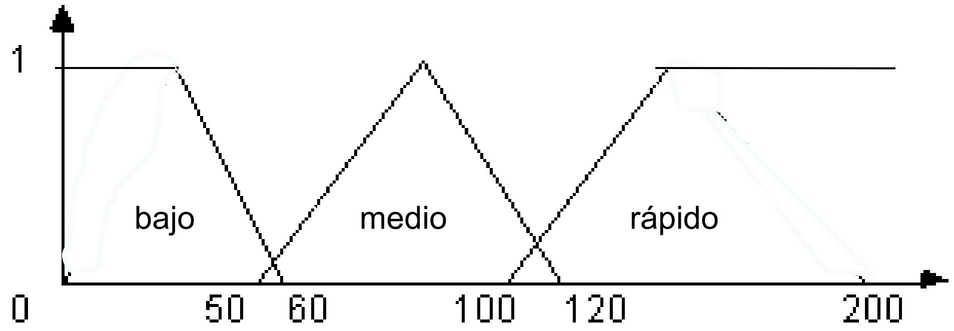
Asuma que $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; entonces $A = \left\{ {0.7}/{x_1}, {03}/{x_2}, {1}/{x_3}, {0}/{x_4} \right\}$ provee una representación de un conjunto difuso de X.

En esta representación del conjunto difuso A, un término de la forma $a_1 / x_1$ debe ser entendido como indicando que el elemento $x_1$ posee grado de membrecía $a_1$ en el subconjunto difuso A.

# EJEMPLO DE CONJUNTOS DIFUSOS

## 3 CONJUNTOS DIFUSOS:

- RÁPIDO [100,200] , LENTO[0,60] , MEDIA[50,120]




- PARA UN CARRO QUE VA A UNA VELOCIDAD DE 55 KM/HORA:

$\mu_{\text{BAJO}}(55) = 0.25$ $\mu_{\text{MEDIO}}(55) = 0.25$ $\mu_{\text{RAPIDO}}(55) = 0$

Bajo= {0/0, 0.5/15, 01/30, 0.5/45, 0/60}

# Variables Lingüísticas

- Si una variable puede tomar valores de “palabras” en un lenguaje natural (por ejemplo, pequeño, rápido, etc.), entonces esa variable define una variable lingüística.
- Estas palabras generalmente son etiquetas de conjuntos difusos.
- Una variable lingüística toma valores lingüísticos(por ejemplo, para velocidad: bajo, rápido, etc.); pero cuando es instanciada toma números según función de pertenencia).

# Variables Lingüísticas

Variable lingüística = (x, A(x), U, G, M)

Donde

- X es el nombre de la variable
- A(x) es el conjunto de términos lingüísticos de x
- U es el universo donde se define cada valor de x
- G es la regla sintáctica para generar las sentencias correctas en A
- M es la regla semántica que asocia a cada valor x su significado

# Variables Lingüísticas

- Ejemplo:
  - X es la variable lingüística *edad*
  - A(*edad*)= {niño, joven, adulto, anciano}
  - Universo de discurso U [0, 120]
  - G es la regla sintáctica para generar conjunto A
  - M es la regla semántica que asocia a cada valor x su significado

# Lógica Difusa

- **Operaciones difusas**, para los conjuntos difusos A y B en el mismo universo U (solo ultimo caso no es en el mismo universo):
  - Unión:

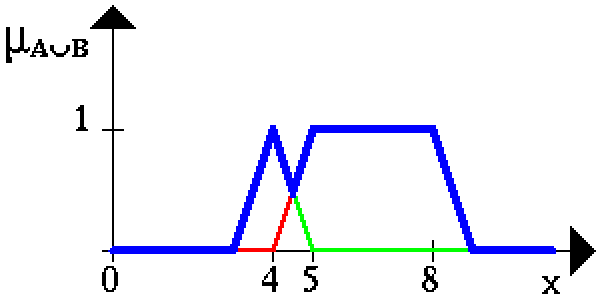
    $\mu_{A\cup B} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \{x/\max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall\ x \in U\}$
  - Intersección:

    $\mu_{A\cap B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \{x/\min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall\ x \in U\}$
  - Complemento de $\mu_A(x) = \{x/(1- \mu_A(x) \quad \forall\ x \in U\}$
  - Producto cartesiano:

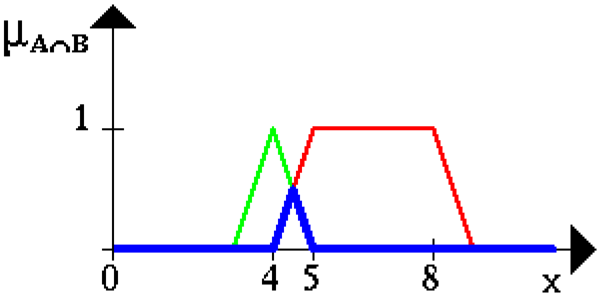
    $\mu_{AxB}(x, y) = \{(x,y)/\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad \forall\ x \in U, \forall\ y \in V\}$

# Lógica Difusa

– Unión:

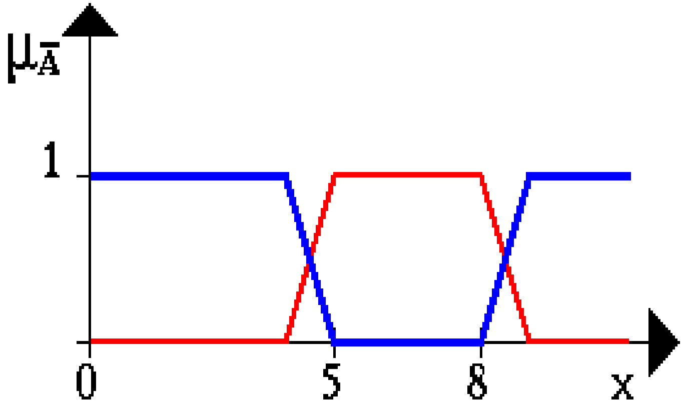



– Intersección:



# Lógica Difusa

– Negación:



# Operaciones sobre conjuntos difusos: Unión

Asuma que A y B son subconjuntos difusos de X. Su unión es un subconjunto difuso C de X, denotado por $C=A\cup B$, tal que para cada $x\in X$

$$C(x)=\mathrm{Max}[A(x),B(x)]=A(x) \vee B(x)$$

**Ejemplo:** Sea $X=\{a,b,c,d,e\}$; asuma que $A=\left\{{}^{1}/_{a}, {}^{0.7}/_{b}, {}^{0.3}/_{c}, {}^{0}/_{d}, {}^{0.9}/_{e}\right\}$ y $B=\left\{{}^{0.2}/_{a}, {}^{0.9}/_{b}, {}^{0.4}/_{c}, {}^{1}/_{d}, {}^{0.4}/_{e}\right\}$

Entonces $C=\left\{{}^{1}/_{a}, {}^{0.9}/_{b}, {}^{0.4}/_{c}, {}^{1}/_{d}, {}^{0.9}/_{e}\right\}$

# Operaciones sobre conjuntos difusos: Intersección

Asuma que A y B son subconjuntos difusos de X, la intersección de A y B, denotado por $D = A \cap B$, es tal que para cada $x \in X$,

$$D(x) = \mathrm{Min}[A(x), B(x)] = A(x) \wedge B(x)$$

**Ejemplo:** Considerando A y B del ejemplo anterior, entonces $D = \left\{ {}^{0.2}/_{a}, {}^{0.7}/_{b}, {}^{0.3}/_{c}, {}^{0}/_{d}, {}^{0.4}/_{e} \right\}$

# Operaciones sobre conjuntos difusos: Complemento

Asuma que A y B son subconjuntos difusos de X. El complemento relativo de B respecto de A, denotado por E=A-B, es definido como el subconjunto difuso E de X donde para cada $x \in X$.

$$E(x)=\text{Max}[0,A(x)-B(x)]$$

**Ejemplo:** Asuma que $A=\left\{1/a, 0.3/b, 0.7/c, 0.6/d, 1/f\right\}$ y $B=\left\{1/a, 1/b, 0.3/c, 0/d, 0.5/f\right\}.$

Entonces $E=A-B=\left\{0/a, 0/b, 0.4/c, 0.6/d, 0.5/f\right\}.$

# Operaciones sobre conjuntos difusos: otras

## Conmutatividad

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

## Asociatividad

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$

## Distributividad

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

# Operaciones sobre conjuntos difusos: otras

- IDEMPOTENCIA:

$$A \vee A = A$$

$$A \wedge A = A$$

- BORNES UNIVERSALES:

$$A \vee 0 = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \wedge 1 = A$$

# Operaciones sobre conjuntos difusos: otras

Propiedades que cumplen el complemento y el complemento relativo de subconjuntos difusos A y B de X.

## Doble negación

$$\overline{(\overline{A})} = A$$

## Leyes de Morgan

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\varnothing} = X \; ; \; \overline{X} = \varnothing$$

# Operaciones sobre conjuntos difusos

- Las funciones min y max son generalizaciones de las operaciones homónimas de los conjunto clásicos.
- En general:
  - La unión e intersección borrosa requieren funciones de forma tal que al aumentar uno de los conjuntos también aumente su unión e intersección
  - Dichas funciones deben ser conmutativas, distributivas y continuas

Las funciones que verifican tales propiedades son las que pertenecen a las clases conormas triangulares (conorma T) y normas triangulares (norma T)

# Norma T

- Una norma T (denotada por "*") es una función de [0,1]x[0,1]-->[0,1] que incluye:
  - Intersección difusa: Min{x,y}
  - Producto algebraico: x.y
  - Producto acotado: x*y=max{0,x+y-1}
  - Producto drástico: {**x** si y=1, **y** si x=1, **0** si x,y<0}

donde $x,y \in [0,1]$

# Conorma T

- La conorma T, denotada por $\dot{+}$ , es una función de [0,1]x[0,1]-->[0,1] que incluye:
  - Unión difusa: Max{x,y}
  - Suma algebraica: x+y-xy
  - Suma acotada= $x \dot{+} y$=min{1,x+y}
  - Suma drástica: {**x** si y=0, **y** si x=0, **1** si x, y>0}

Con x,y$\in$ [0,1]

# Relaciones difusas

Si $A_1, A_2, A_k, A_n$ son conjuntos difuso de $x_1, x_2, x_k, x_n$ respectivamente, entonces sus productos cruzados $A_1 x A_2 x A_k x A_n$ es un conjunto difuso de $X_1 x X_2 x X_k x X_n$, denotado por T= $A_1 x A_2 x A_k x A_n$ , donde

$$T(x_1, x_2, x_k, x_n) = \mathrm{Min}_i[A_i(x_i)], \quad x_i \in X_i \quad i=1,2,\ldots,n.$$

**Ejemplo:** Asuma que $A = \left\{ {}^{1}\!/_{a}, {}^{0.6}\!/_{b}, {}^{0.3}\!/_{c} \right\}$ y $B = \left\{ {}^{1}\!/_{1}, {}^{0.5}\!/_{2}, {}^{0}\!/_{3} \right\}$ son conjuntos difusos sobre los espacios X={a,b,c} y Y={1,2,3} respectivamente, entonces

$$AxB = \left\{ {}^{1}\!/_{(a,1)}, {}^{0.5}\!/_{(a,2)}, {}^{0}\!/_{(a,3)}, {}^{0.6}\!/_{(b,1)}, {}^{0.5}\!/_{(b,2)}, {}^{0}\!/_{(b,3)}, {}^{0.3}\!/_{(c,1)}, {}^{0.3}\!/_{(c,2)}, {}^{0}\!/_{(c,3)} \right\}$$

# Relaciones difusas

Asuma que A es una relación difusa sobre XxY. La proyección de A sobre X es un conjunto difuso $A°$ de X, que denotamos por $A° = Proy_x A$ y que definimos por
$A°(x) = Max_x [A(x, y)]$

**Ejemplo:** Asuma X={a,b,c} y Y={1,2,3} y sea
$A = \left\{ 1/(a,1), 0.6/(a,2), 0.4/(a,3), 0.5/(b,1), 0.8/(b,2), 0.2/(b,3), 0.3/(c,1), 0.1/(c,2), 0.3/(c,3) \right\}$

Entonces $Proy_x A = \left\{ 1/a, 0.8/b, 0.3/c \right\}$ y $Proy_y A = \left\{ 1/1, 0.8/2, 0.3/3 \right\}$

# Principio de la extensión

si A y B son dos números difusos, su suma C=A+B, es también un numero difuso, donde para cada $z \in R$,

$$C(z) = \underset{\substack{todos\ los\ x,y \\ / x+y=z}}{Max} [A(x) \wedge B(y)]$$

Mas generalmente asuma que $\perp$ es cualquier operación aritmética: adición, sustracción, multiplicación, división, o exponenciación y sean A y B dos números difusos. Entonces $A \perp B = C$, donde C es un número difuso tal que:

$$C(z) = \underset{\substack{todos\ los \\ x,y \in \Re}}{Max} [A(x) \wedge B(y) / (x \perp y)]$$

# Medidas Borrosas

- Borrosidad: distancia de un conjunto difuso A a uno discreto C, tal que C contiene los valores de x para $\mu_A(x) > 0$

- Distancia entre dos conjuntos difusos A y C
  - Hamming $\quad f(A) = \Sigma|\mu_A(x) - \mu_C(x)|$
  - Euclidea $\quad f(A) = (\Sigma((\mu_A(x) - \mu_C(x))^2)^{1/2}$
  - …

- Similitud es igual a distancia

- Entropía Borrosa: cuanto aporta conjunto A a la descripción de la variable x

$$f(A) = \Sigma\{\mu_A(x)\log\mu_A(x) + [1-\mu_A(x)]\log[1-\mu_A(x)]\}$$

# Operaciones sobre conjuntos difusos

- Reglas de modificación: adverbio (bastante, muy, mas o menos, etc.) que se utiliza para especificar una propiedad mas concreta
- Son operaciones sobre la función de pertenencia, ejemplos:
  - Negación o “no”: $NEG(\mu(x)) = 1 - \mu(x)$
  - Concentración o “muy”: $CON(\mu(x)) = \mu(x)^2$
  - Dilatación o difusión o “algo”, o “mas o menos” o “casi”:

    $DIL(\mu(x)) = \mu(x)^{0.5}$
  - Intensificación o “bastante”:

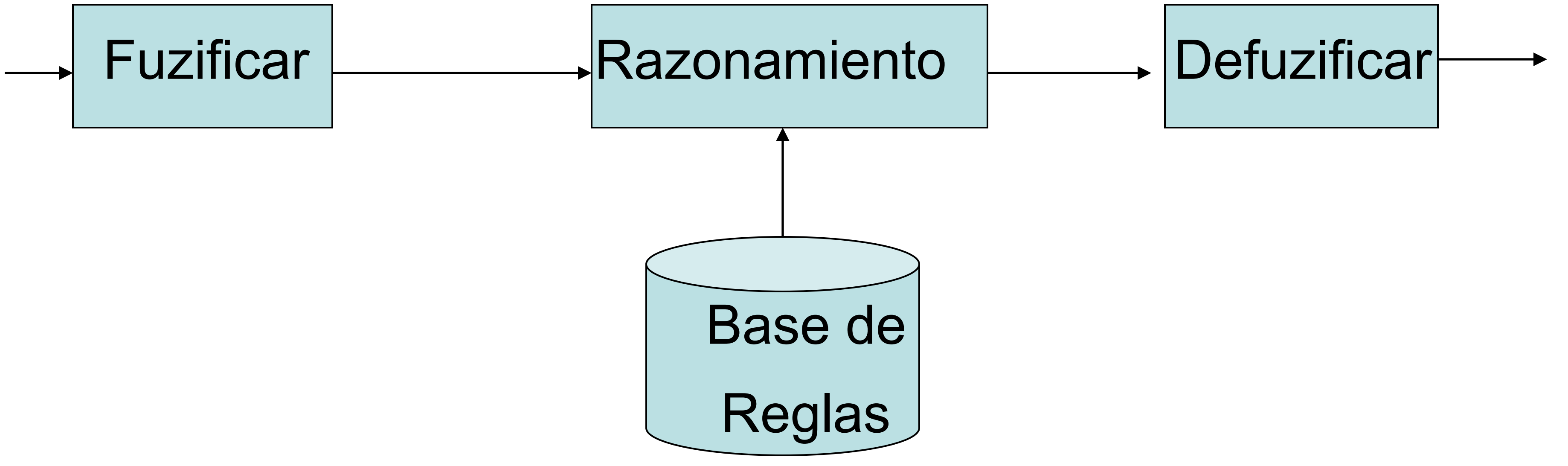
    $$INT(\mu(x)) = \begin{cases} 2\mu^2(x) & \text{si } 0 \le \mu(x) \le 0.5 \\ 1 - 2(1-\mu(x))^2 & \text{si } \mu(x) > 0.5 \end{cases}$$

# Operaciones sobre conjuntos difusos

- Altura de un conjunto difuso: valor mas grande de su conjunto de pertenencia $\sup_{x \in X} \mu_A(x)$
- Conjunto difuso normalizado: Altura(A)=1
- Soporte de un conjunto difuso (soporte(A)): elementos de X que pertenecen a A con grado mayor a 0
- Núcleo de un conjunto difuso: elementos de X que pertenecen a A con grado mayor = 1
- Cardinalidad de un conjunto difuso $\mathrm{card}(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$
- $\alpha$-corte: valores de X con grado menores a $\alpha$
- Inclusión difusa

$$S(A,B) = \Sigma \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x)) / \mathrm{card}(A)$$

# Sistemas Difusos



# Razonamiento Aproximado

- El concepto central de esta teoría es asignar conjuntos difusos como valores de variables y representar este par variable-valor difuso en sentencias o proposiciones lingüísticas.

El sistema de *Razonamiento aproximado* ofrece un mecanismo para modelar y hacer inferencias a partir de relaciones funcionales imprecisas y constituye la base para derivar algunos de los mecanismos de inferencia conocidos.

# Base de Reglas

- La lógica difusa puede ser representada por implicaciones difusas del tipo

A => B (condición/acción)

si A entonces B, donde A y B son **proposiciones difusas.**

- La inferencia borrosa es basada en implicaciones borrosas y las reglas de inferencia derivadas de estas

=>*proceso deductivo llamado modus ponens.*

Por ejemplo, si *Ana es Joven* entonces *personalidad es inmadura.*

# Proposiciones Difusas

- Proposición X es A,

  donde X es una variable que toma su valor de un dominio U y A es un conjunto difuso que pertenece a ese dominio

  **La talla de Juan es Grande**

- Imprecisión no difusa

  Juan Mide entre 1.80m y 1.90m

- Imprecisión difusa

  **Juan mide casi 1.82m**

# Lógica Difusa

- **Conocimiento:**
  - Colección de proposiciones difusas (V es M)
  - Sobre un conjunto de variables (V variable difusa)
  - Sometidas a un proceso de inferencia
- **Razonamiento Aproximado:**
  - **Conjunción(P1xP2)** P1= Va es M P2=Vb es N

    => V es P tal que $\mu_P(z)= \mu_M(x)\wedge\mu_N(y)$

    Si Va=Vb es una intersección

    Si Va no tiene var. Comun Vb es prod. Cartesiano
  - **Proyección P sobre Vb** para P=Va es M es P1=Vb es N

    => $\mu_N(z)= \max_Q(\mu_M(x))$ Q son los x de Va que concuerdan con z en Vb para var. en común en los 2

# Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

- Los elementos básicos de un sistema de razonamiento aproximado son la colección de variables simples *V1,…Vn* y una colección de conjuntos *X1,…Xn*, donde cada *Xi* es el *conjunto base* en el universo de discurso de la variable *Vi*.

- Dicho conjunto *Xi* contiene los valores posibles que puede tomar la variable *Vi*.

# Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

- Una *variable conjunta* es una colección de una o más variables simples. Por ejemplo, Va, Vb y Vc son variables conjuntas definidas por Va=(V1, V2), Vb=(V1, V4, V5) y Vc=V1.

- Una *proposición* es una sentencia de la forma *V es M*, donde *V* es una variable conjunta, *M* es un conjunto difuso **sobre el espacio del producto cartesiano de los conjuntos base de las variables simples** que conforman a la variable conjunta.

# Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

Sean Va y Vb dos variables simples sobre las bases X y Y, respectivamente. Sean *P1=Va es M* y *P2=Vb es N* dos proposiciones. Su conjunción P1 y P2 es la proposición:

V es P

donde V es una variable conjunta que consiste en la unión de las variables simples que conforman a Va y Vb y P es un conjunto difuso sobre el dominio de V, tal que para *z* en el dominio de V:

$$\mu_P(z) = \mu_M(x) \wedge \mu_N(y)$$

donde x es el elemento en X que concuerda con *z* sobre el dominio que **tienen en común**. Análogamente, y es el elemento de Y que concuerda con *z* sobre el dominio que **tienen en común**.

# Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

- Si las variables en la operación conjunción son las mismas, la operación se reduce a la operación *intersección* entre conjuntos difusos.

$$(Va \text{ es } M) \cap (Va \text{ es } N) = Va \text{ es } M \cap N$$

- Si Va y Vb no tienen variables comunes, la operación conjunta resulta en el clásico producto cartesiano. Esto es:

$$(Va \text{ es } M) \cap (Vb \text{ es } N) = (Va, Vb) \text{ es } M \times N$$

La manipulación del conocimiento a través de proposiciones difusas en un sistema de razonamiento aproximado, está basada fundamentalmente en las operaciones de *implicación* y *proyección*.

# Modus ponens generalizado

Sea U y V dos variables lingüísticas y A', A, B' y B conjuntos difusos. Entonces, el procedimiento de inferencia *modus ponens generalizado* se define como:

**Premisa 1:** U es A (proposición de entrada)

**Premisa 2:** Si U es A entonces V es B

**Consecuencia:** V es B (proposición inferida).

La proposición inferida se obtiene a partir del mecanismo propuesto por la teoría de razonamiento aproximado, formando la conjunción de las premisas 1 y 2

# Implicaciones difusas

Una implicación difusa $A \rightarrow B$ puede ser entendida como una regla difusa del tipo "Si – Entonces".

Ejemplo: Si x es A entonces y es V;

donde $x \in U$, $y \in V$ son variables lingüísticas.

# Tipos de Implicaciones difusas

Sean A y B conjuntos difusos en U y V, respectivamente. Una implicación difusa, denotada por A→B, es un tipo especial de relación difusa en UxV con una de las siguientes funciones de membresía:

(a) **Conjunción Difusa**: $\mu_{A\to B}(u,v)=\mu_A(u)*\mu_B(v)$

(b) **Disyunción Difusa**: $\mu_{A\to B}(u,v)=\mu_A(u)\dot{+}\mu_B(v)$

(c) **Implicación Material**: $\mu_{A\to B}(u,v)=\mu_{\bar{A}}(u)\dot{+}\mu_B(v)$

(d) **Cálculo Proposicional**: $\mu_{A\to B}(u,v)=\mu_{\bar{A}}(u)\dot{+}\mu_{A*B}(v)$

# Tipos de Implicaciones difusas

(e) Implicación borrosa por la regla del mínimo: $\mu_{A\to B}(u,v) = \min[\mu_A(u), \mu_B(v)]$

(f) Implicación borrosa por la regla del producto: $\mu_{A\to B}(u,v) = \mu_A(u)\mu_B(v)$

(g) Implicación borrosa por la regla aritmética $\mu_{A\to B}(u,v) = \min[1, 1-\mu_{\bar{A}}(u)+\mu_B(v)]$

(h) Implicación borrosa por la regla Max-Min:

$$\mu_{A\to B}(u,v) = \max\{\min[\mu_A(u), \mu_B(v)], 1-\mu_A(u)\}$$

(i) Implicación borrosa por la regla Booleana: $\mu_{A\to B}(u,v) = \max\{1-\mu_A(u), \mu_B(v)\}$

# Procedimiento para la obtención de la salida difusa

Si las entradas al SD son los valores $u_1 = x_1^*$ y $u_2 = x_2^*$, entonces un procedimiento para obtener el valor aproximado de la variable de salida difusa V es el siguiente:

1. Encuentre el nivel de tiro de cada una de las reglas.
2. Encuentre la salida para cada regla (implicación difusa)
3. Agregue las salidas de las reglas individuales para obtener la salida total del sistema.

# Modelos Difusos

Basado en Reglas SI-ENTONCES con proposiciones difusas y razonamiento aproximado.

- SISO SI A ENTONCES B
- MISO SI U1 Y U2 Y U3 ... ENTONCES B
- MIMO SI U1 Y U2 Y U3 ... ENTONCES V1; V2; V3

# Razonamiento Aproximado Básico
## (CADA REGLA TIENE SU PESO)

- :SI (X ES Ai) ENTONCES (Y SERÁ Cj)

  $\mu_{Cj}(Y)$= PESO DE LA REGLA = $\mu_{Ai}(X)$

- SI ($X_1$ ES Ai) Y ($X_2$ ES Bj) ENTONCES (Y SERÁ Cj)

  $\mu_{Cj}(Y)$=PESO DE LA REGLA = MIN($\mu_{Ai}(X_1)$, $\mu_{Bj}(X_2)$)

- SI ($X_1$ ES Ai) O ($X_2$ ES Bj) ENTONCES (Y SERÁ Cm)

  $\mu_{Cm}(Y)$= PESO DE LA REGLA = MAX ($\mu_{Ai}(X_1)$, $\mu_{Bj}(X_2)$)

- R1: SI ... ENTONCES (Y1 SERÁ C) Y (Y2 SERA D)

  R2: SI ... ENTONCES (Y1 SERÁ C) Y (Y2 SERA E)

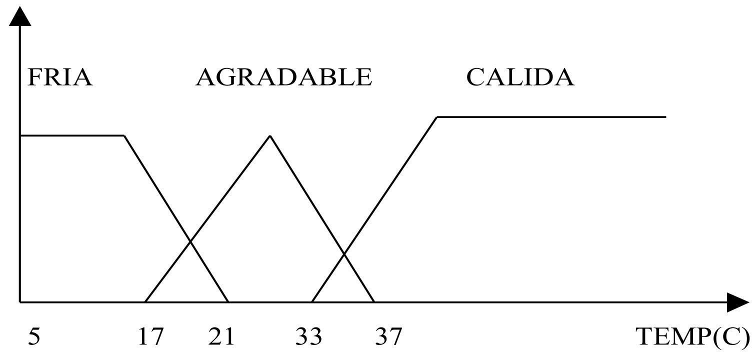
  $\mu_C$(R1UR2)= MAX (PESO REGLA R1, PESO REGLA R2)

  $\mu_D$(Y1)= PESO REGLA R1

  $\mu_E$(Y2)= PESO REGLA R2

# Lógica Difusa

- Ejemplo 1:

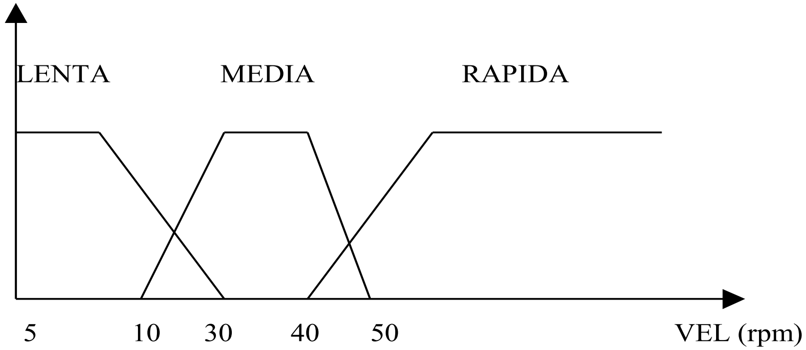



TEMP(18)={0.5/FRIA,0.2/AGRADABLE,0/CALIENTE }

**BASE DE REGLAS:** SI TEMP ES FRIA ENTONCES VEL SERA LENTA

SI TEMP ES AGRADABLE ENTONCES VEL SERA MEDIA

SI TEMP ES CALIDA ENTONCES VEL SERA MAXIMA



# Algoritmo de inferencia para modelo SISO

**SI (X ES Bi) ENTONCES (Y SERÁ Di)**

1. Para cada Regla

- Grado de disparo de la regla i (nivel de disparo τde la i-ésima regla)

$$\tau_i=\mu_{Bi}(x)$$

- Conjunto difuso Fi dado como salida por la regla i (implicación difusa)

$$Fi(y)=\tau_i\wedge\mu_{Di}(y) \qquad => \mu_{Ri}(x,y)= \mu_{Bi}(x)\wedge\mu_{Di}(y)$$

2. Agregación de las salidas de cada regla F(y)

$$Fi \qquad F(y)=\vee i\ Fi(y) \qquad R= \cup i\ Ri$$

$$=> \qquad \mu_R(x,y)= \vee i\ \mu_{Ri}(x,y)= \vee i(\mu_{Bi}(x)\wedge\mu_{Di}(y))$$

# Algoritmo de inferencia para modelo MISO

$$Ri=Bi1 \wedge Bi2 \wedge \ldots \wedge Bir \wedge Di$$

1. Para cada Regla

- Grado de disparo de la regla i

$$\tau_i = (\vee \wedge \mu_{Bi1}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{Bir}(x_r))$$

- Conjunto difuso Fi dado como salida por la regla i

$$Fi(y)=\tau_i \wedge \mu_{Di}(y)$$

2. Agregación de las salidas de cada regla F(y)

$$F(y)=\vee i\ Fi(y)$$

# Cálculo del grado de disparo para modelos MIMO

- Para el caso de modelos MIMO, siendo considerados como un conjunto de subsistemas MISO, el cálculo de $\tau i$ para la i-ésima regla de cada subsistema es:

$$\tau i = \mu_{Bi1}(x_1^*) \wedge \ldots \wedge \mu_{Bir}(x_r^*)$$

# Cálculo del grado de disparo para modelos MIMO

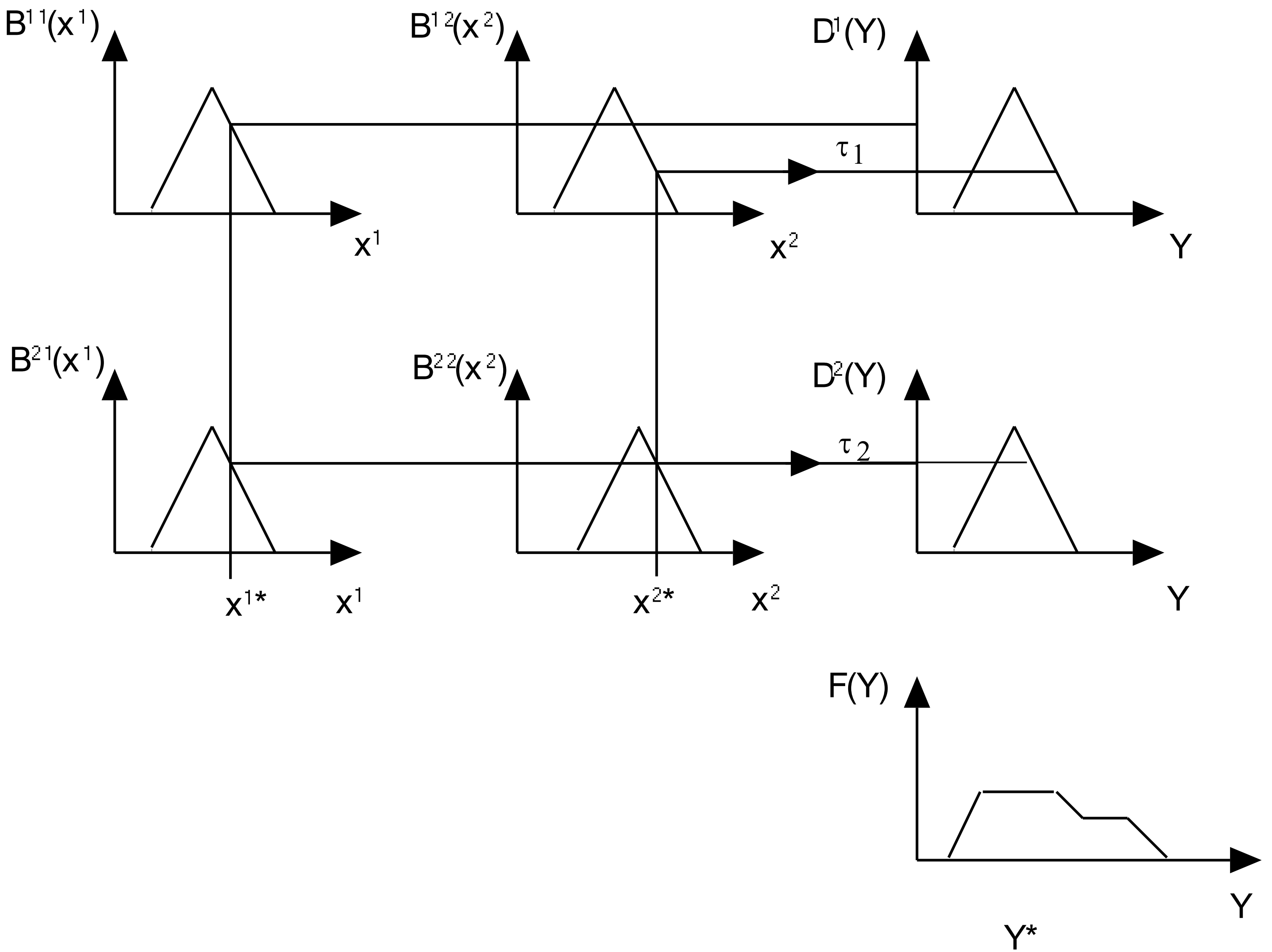
- En el modelo propuesto por Takagi-Sugeno-Kang, el mecanismo de inferencia propone el grado de disparo de cada regla híbrida dada por la ecuación

$$\tau_i = \mu_{Bi1}(u_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{Bir}(u_r)$$

Donde $u_j$ es un valor puntual j=1,…, r

parecido a la anterior!!!

# Algoritmo de razonamiento de un SD tipo Mamdani

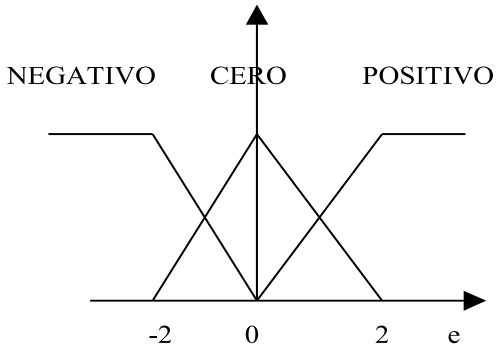


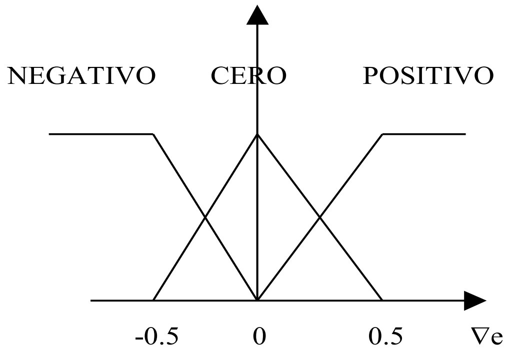
# Lógica Difusa (Modelo de Mamdani)

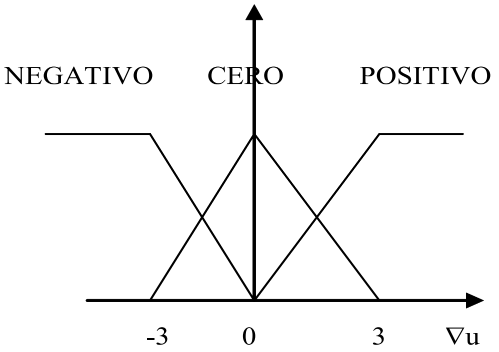
- EJEMPLO 2:

R1: SI e ES NEG  Y ∇e ES NEG ENTONCES ∇u ES NEG
R2: SI e ES NEG  Y ∇e ES CERO ENTONCES ∇u ES NEG
R3: SI e ES NEG  Y ∇e ES POSIT ENTONCES ∇u ES CERO
R4: SI e ES CERO  Y ∇e ES NEG ENTONCES ∇u ES NEG
R5: SI e ES CERO  Y ∇e ES CERO ENTONCES ∇u ES CERO
R6: SI e ES CERO  Y ∇e ES POSIT ENTONCES ∇u ES POSIT

…



# Lógica Difusa (Modelo de Mamdani)

- EJEMPLO 2:

SUPONER DE ENTRADA $e=-2.1$ Y $\nabla e=0.5$

=> R3 UNICA QUE SE ACTIVA

ADEMAS, EL UNIVERSO DE DISCURSO DISCRETO DE

$\nabla e$ ES {-2, -1,-0.5, -0.25, 0. 0.25, 0.5, 1, 2}

e ES {-4, -3, -2, -1, 0. 1, 2, 3, 4}

$\nabla u$ ES {-6, -4.5,-3, -1.5, 0. 1.5, 3, 4.5, 6}

=> $\mu_N(\nabla u) = [1, 1, 1, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0]$

$\mu_C(\nabla u) = [0, 0, 0, 0.5, 1, 0.5, 0, 0, 0]$

$\mu_P(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$

GRADO MEMBRESIA DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS DE SALIDAS

$\mu_{F1}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

$\mu_{F3}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0.5, 1, 0.5, 0, 0, 0]$

$\mu_{F5}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

$\mu_{F2}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

$\mu_{F4}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

$\mu_{F6}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

# DEFUSIFICACIÓN

CONSISTE EN DETERMINAR VALOR NUMÉRICO DESDE UNA SALIDA BORROSA.

- FUNCION DE PERTENENCIA DEL CONJUNTO BORROSO DE SALIDA

$\mu_X(Y)$ = PESO REGLA Ri * $\mu_{Xi}(Y)$ + PESO REGLA Rj * $\mu_{Xj}(Y)$ + . . . ..

= MIN(PESOREGLA Ri, $\mu_{Xi}(Y)$)+MIN(PESOREGLA Rj, $\mu_{Xj}(Y)$)

# Difusificación sencilla

- Dado un valor puntual $x^* \in X$, el mecanismo de difusificación consiste en crear un conjunto difuso A, cuya función de pertenencia es aquella donde para cualquier $x \in X$ su valor es cero excepto en el valor de $x^*$, donde toma el valor de 1. Esto es:

$$\mu A(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \neq x^* \\ 1 & \text{Si } x = x^* \end{cases}$$

Nótese que este conjunto difuso así considerado no es mas que un conjunto ordinario con un único elemento dado por x*

# OTRAS TÉCNICAS CLÁSICAS DEFUZIFICACIÓN

- CENTROIDE o MÉTODO DEL CENTRO DEL AREA (MCA): trata de calcular el centro de masa de un conjunto difuso F (centroide difuso):

$$y^* = \frac{\int_r yF(y)dy}{\int_r F(y)dy}$$

$$y^* = \frac{\sum_{J=1}^{n} F(y_J)y_J}{\sum_{J=1}^{n} F(y_J)}$$

Para F(y) función de membresía discreta:

# OTRAS TÉCNICAS CLÁSICAS DEFUZIFICACIÓN

- MÁXIMO: MAYOR VALOR DE SALIDA Y SE LE CALCULA SU CENTROIDE

$$Y = MAX\ (Y_1 \text{ -> } \mu(Y_1),\ Y_2 \text{ -> } \mu(Y_2),\ .\ .\ .\ .)$$

# Método de Media de Máximos (MMM)

- El MMM determina el valor desdifusificado como una media de todos los valores del universo que poseen grado de membresía máximo. Esto es

$$y^* = \frac{1}{q} \sum_{j \in J^*} y_j$$

# Lógica Difusa

- Ejemplo 1:

$$Y = [CENTROIDE_{LENTA}\ \mu_{LENTA}(Y) + CENTROIDE_{MEDIA}\ \mu_{MEDIA}(Y)]/[\mu_{LENTA}(Y) + \mu_{MEDIA}(Y)] = (10*0.5+35*0.2)/(0.5+0.2)=17{,}14\text{rpm}$$

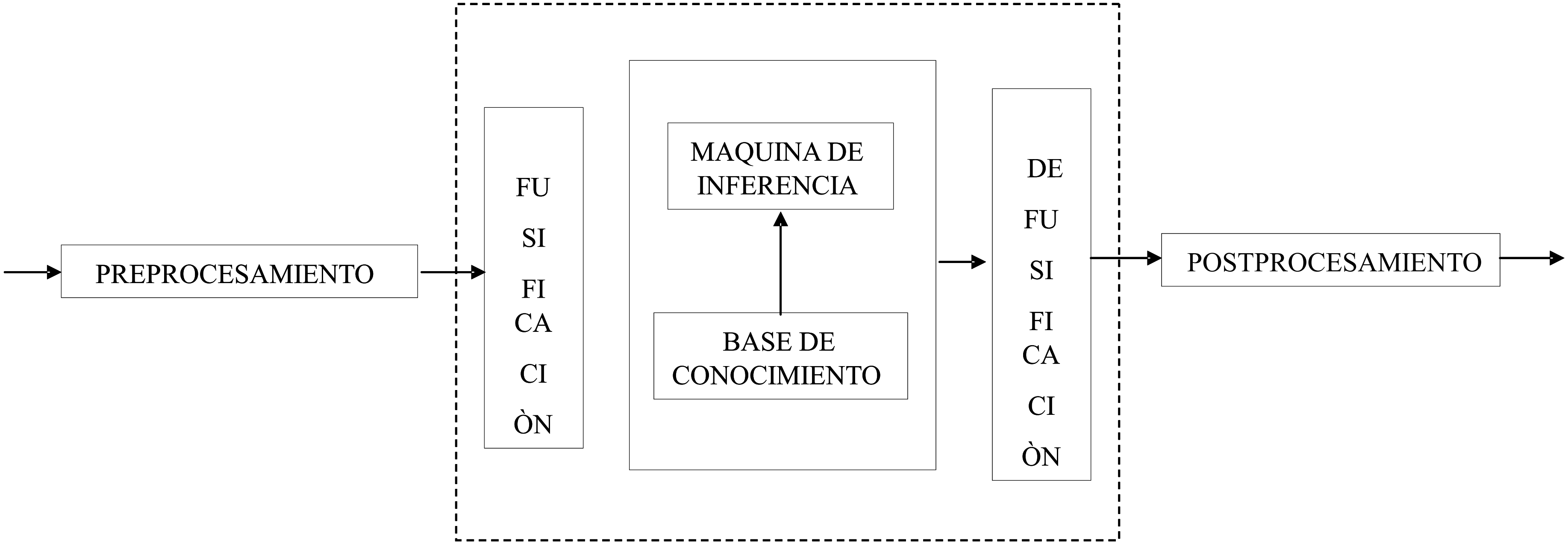
- EJEMPLO 2:

$$\nabla u = [0.5(-1.5)+1(0)+0.5(1.5)]/(0.5+1+0.5]= 0$$

# Definición de Fusificador

El fusificador realiza una transformación de un punto de un conjunto ordinario $X=(x1, x2, \ldots, xn) \in U$ a un conjunto difuso $A' \in U$.

# componentes básicos en el diseño de un sistema lógico difuso




**Librería: http://www.fuzzylite.com/**

# Lógica Difusa

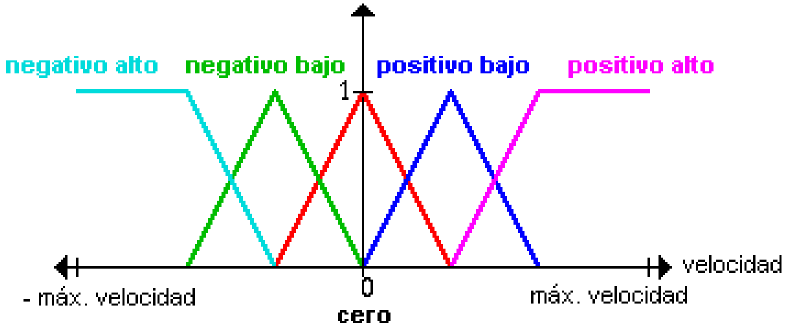
Pasos a seguir para aplicar la lógica difusa en un problema:

- Identificar las variables y sus posibles rangos de valores.
- Determinar las funciones de pertenencia de esos valores a expresiones descriptivas.
- Determinar las reglas que rigen el comportamiento del sistema.
- Seleccionar algún método para darle un valor preciso a los resultados descriptivos.

# Ejemplo

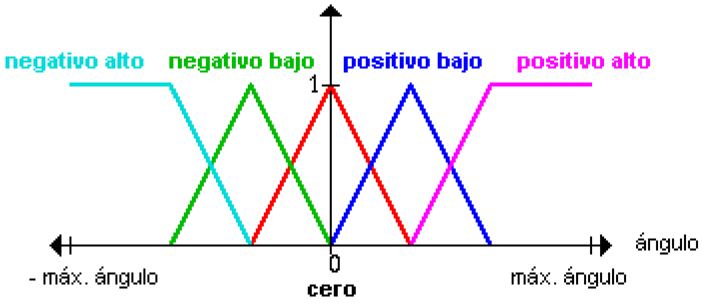
- **El péndulo invertido:** El problema está en equilibrar una pértiga sobre una plataforma móvil que puede moverse en dos únicas direcciones, a la izquierda o a la derecha.

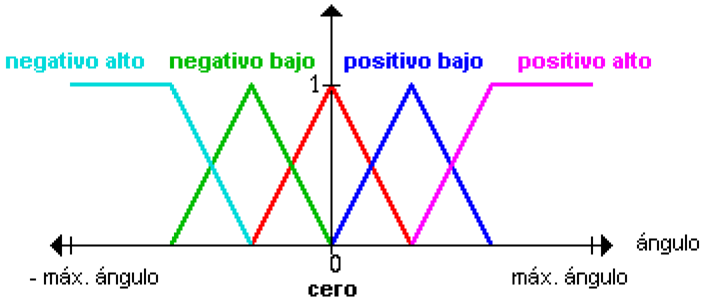
Se define (subjetivamente) cual es la velocidad del anden: alta, baja, etc.



# Ejemplo

- Lo mismo se hace para el ángulo entre la plataforma y la pértiga, y la velocidad angular de este ángulo:

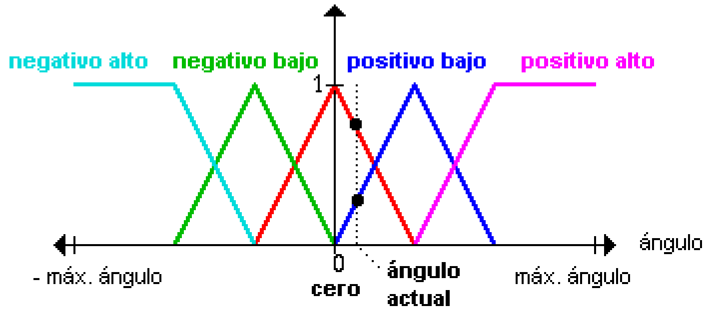


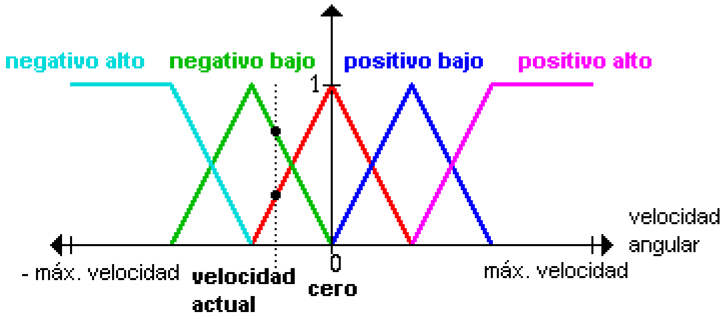




- Algunas reglas del sistema difuso
  - **Si** el ángulo es cero **y** la velocidad angular es cero **entonces** la velocidad será cero.
  - **Si** el ángulo es cero **y** la velocidad angular es positiva baja **entonces** la velocidad será positiva baja.

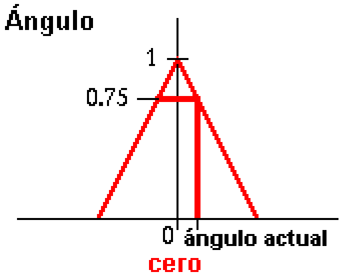
# Ejemplo

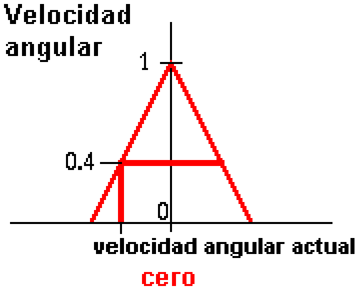
Consideremos un valor actual para el ángulo y velocidad angular



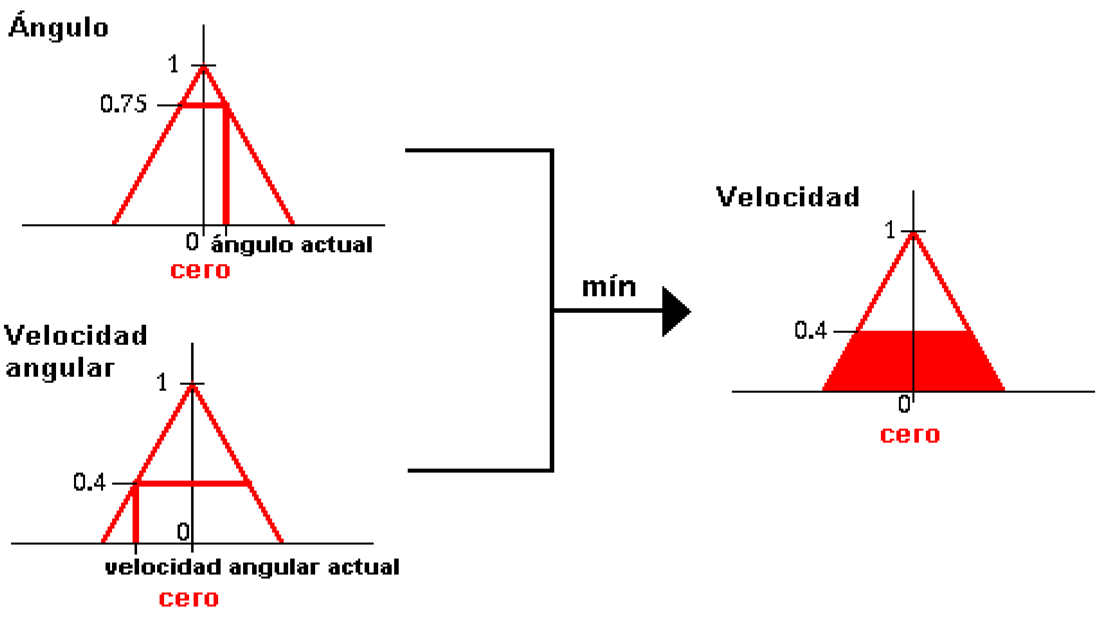

- Veamos como aplicar una regla
  - **Si** el ángulo es cero **y** la velocidad angular es cero **entonces** la velocidad será cero.



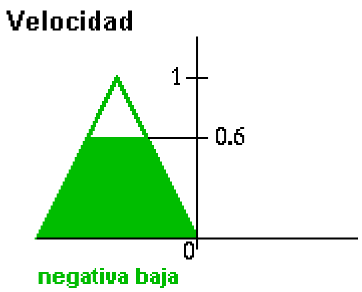
# Ejemplo

- Como las dos partes de la condición de la regla están unidas por una Y (operación lógica AND), calculamos el mín(0.75,0.4)=0.4 y cortamos el conjunto borroso "cero" de la variable "velocidad" a este nivel (según nuestra regla):

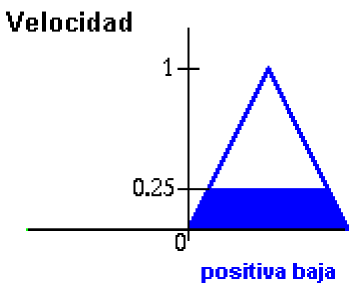


# Ejemplo

- Por su parte, el resultado de las reglas
  - **Si** el ángulo es cero **y** la velocidad angular es negativa baja **entonces** la velocidad será negativa baja

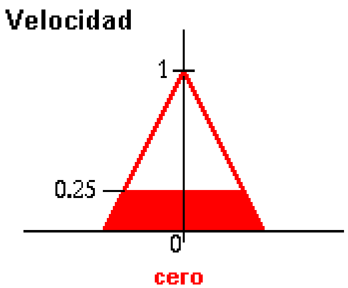



  - **Si** el ángulo es cero **y** la velocidad angular es positiva baja **entonces** la velocidad será positiva baja

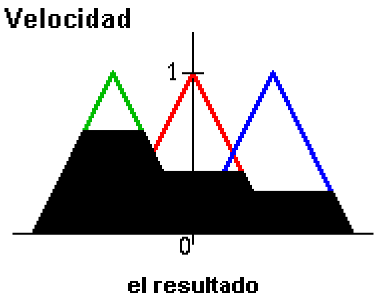


# Ejemplo

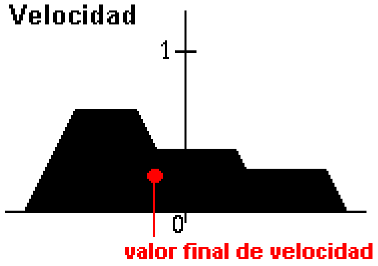
- **Si** el ángulo es positivo bajo **y** la velocidad angular es negativa baja **entonces** la velocidad será cero




- Estas cuatro reglas solapadas desembocan en un resultado único:




Tenemos que escoger un valor representativo como salida final usando alguno de los métodos de defuzzification



# CASO DE ESTUDIO 2

## SISTEMA CLASIFICADOR DE LIRIOS

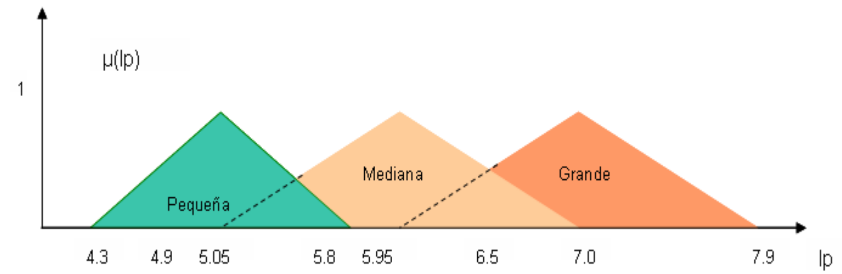
- Clasificar correctamente las variedades de flor Iris (Lirios), respecto a las clases: **setosa, virgínica y versicolor**.
- Los atributos utilizados para la clasificación son la **longitud y ancho** de los pétalos, y el **largo y ancho** de los tallos.

### Variables

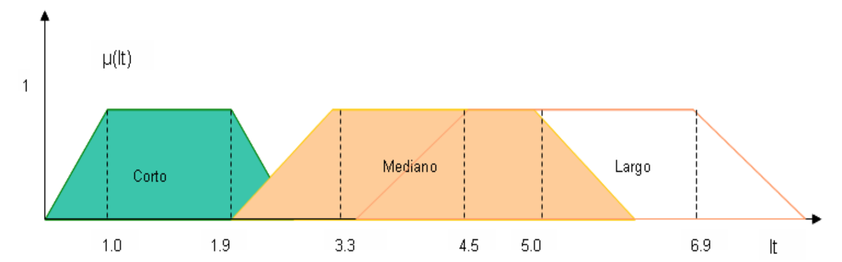
- Variables de entrada: ancho del pétalo (ap), longitud del pétalo (lp), ancho del tallo (at) y longitud del tallo (lt).
- Variables de salida: Clase.

# CASO DE ESTUDIO 2

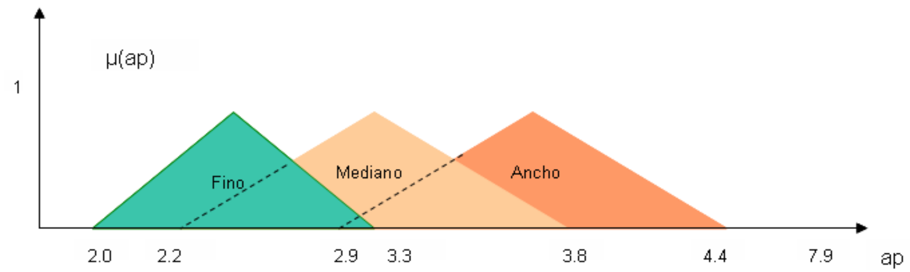
## SISTEMA CLASIFICADOR DE LIRIOS



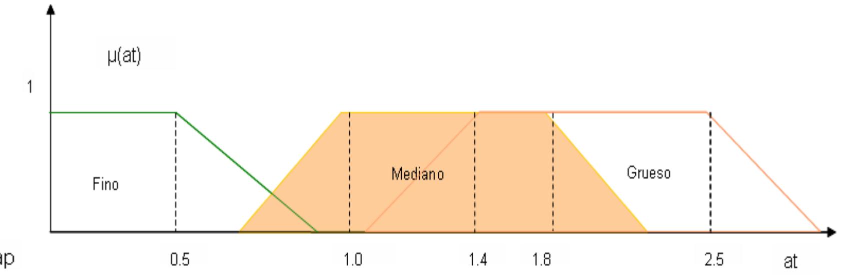

**Funciones de pertenencia para lp**




**Funciones de pertenencia para lt**




**Funciones de pertenencia para ap**




**Funciones de pertenencia para at**

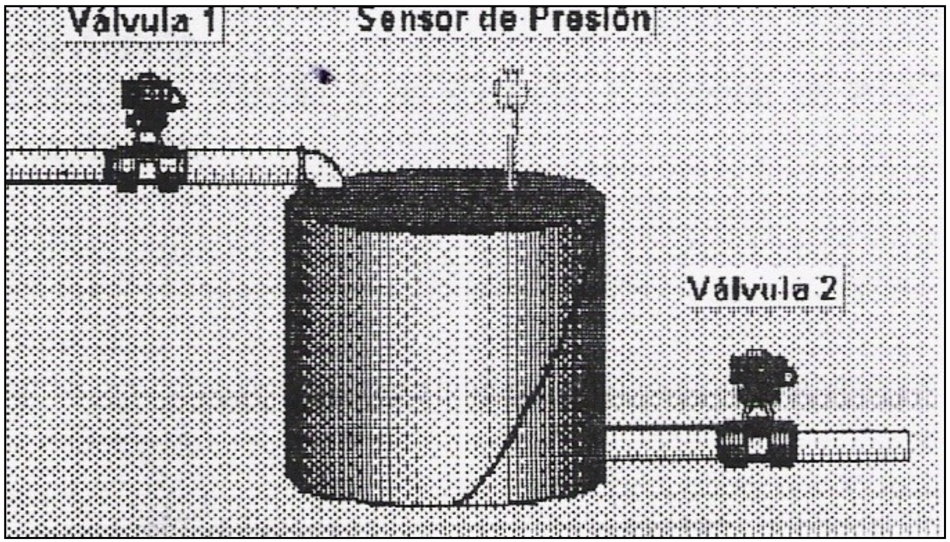
# CASO DE ESTUDIO 2

## SISTEMA CLASIFICADOR DE LIRIOS

1. Si lp es Pequeña Y ap es Ancho Y lt es Corto Y at es Fino Entonces Clase es Setosa.
2. Si lp es Mediano Y ap es Fino Y lt es Mediano Y at es Mediano Entonces Clase es Virgínica.
3. Si lp es Grande Y ap es Mediano Y lt es Largo Y at es Largo Entonces Clase es Versicolor.
4. Si lp es Grande Y ap es Fino Y lt es Largo Y at es Grande Entonces Clase es Versicolor.
5. Si lp es Mediano Y ap es Mediano Y lt es Mediano Y at es Mediano Entonces Clase es Virginica.
6. Si lp es Pequeña Y ap es Mediano Y lt es Fino Y at es Fino Entonces Clase es Setosa.

# CASOS DE ESTUDIO 3

## SISTEMA DE CONTROL PARA UN TANQUE

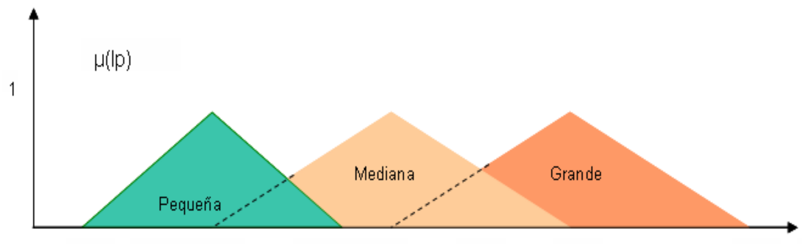



Las variables en el sistema son:
**Variables de entrada**: presión, válvula 1 y válvula 2.
**Variables de salida**: válvula 1 y válvula 2.

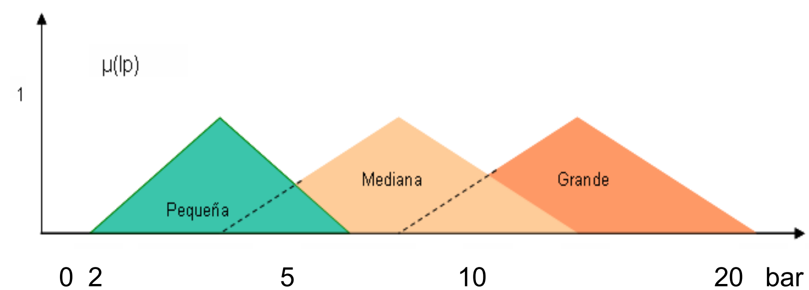
**Válvula 1** y **Válvula 2**: tipo Enumerado, con valores difusos de apertura: mediana, grande, pequeña.

**Presión**: tipo entero, con un rango de variación entre 0 y 20, con valores difusos de presión: mediana, grande, pequeña.

# CASOS DE ESTUDIO 3




**Funciones de pertenencia para válvulas**



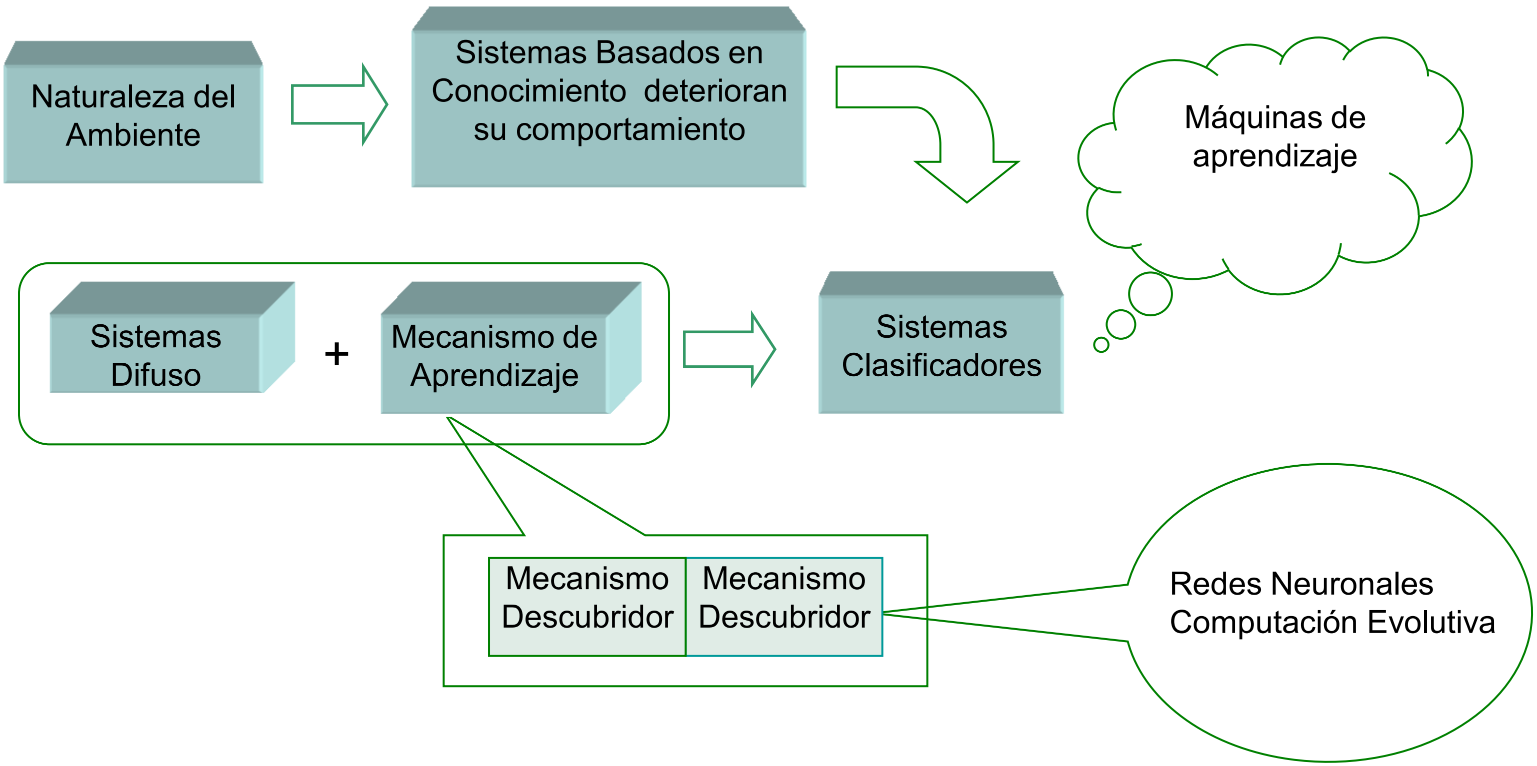

**Funciones de pertenencia para presión**

# CASOS DE ESTUDIO 3

## SISTEMA DE CONTROL PARA UN TANQUE

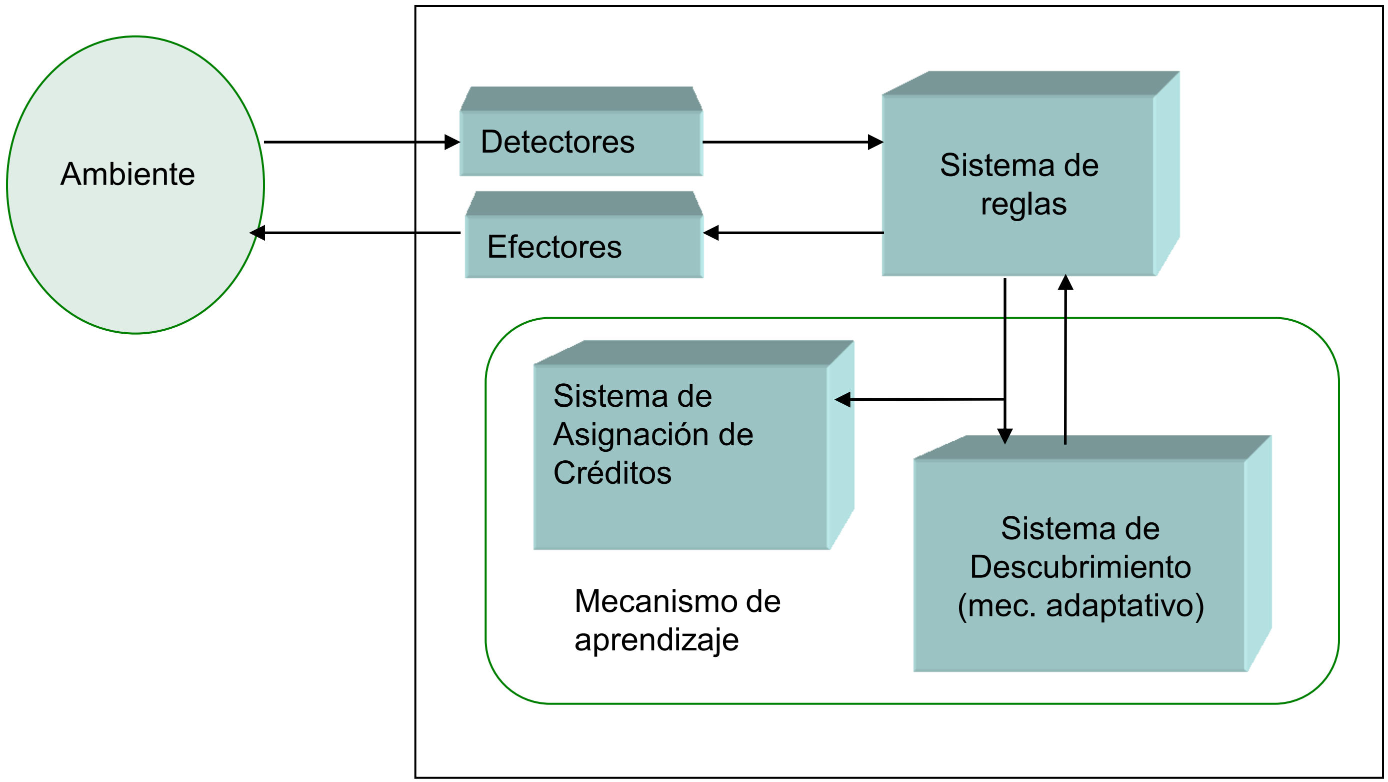
1. Si Valvula1 == grande Y Valvula2 == grande Y Presión < 5 Entonces Valvula1 = mediana Y Valvula2 = pequeña.
2. Si Valvula1 == mediana Y Valvula2 == grande Y Presión > 10 Entonces Valvula1 =pequeña Y Valvula2 = grande.
3. Si Valvula1 == grande Y Valvula2 ==mediana Y Presión > 10 Entonces Valvula1 =pequeña Y Valvula2 = mediana.
4. Si Valvula1 == grande Y Valvula2 == mediana Y Presión >= 5 Y Presión <=10 Entonces Valvula1 = grande Y Valvula2 = pequeña.
5. Si Valvula1 == pequeña Y Valvula2 == grande Y Presión < 5 Entonces Valvula1 = grande Y Valvula2 = pequeña.
6. Si Valvula1 == pequeña Y Valvula2 == grande Y Presión < 5 Entonces Valvula1 = grande Y Valvula2 = pequeña.

# Máquinas de Aprendizaje



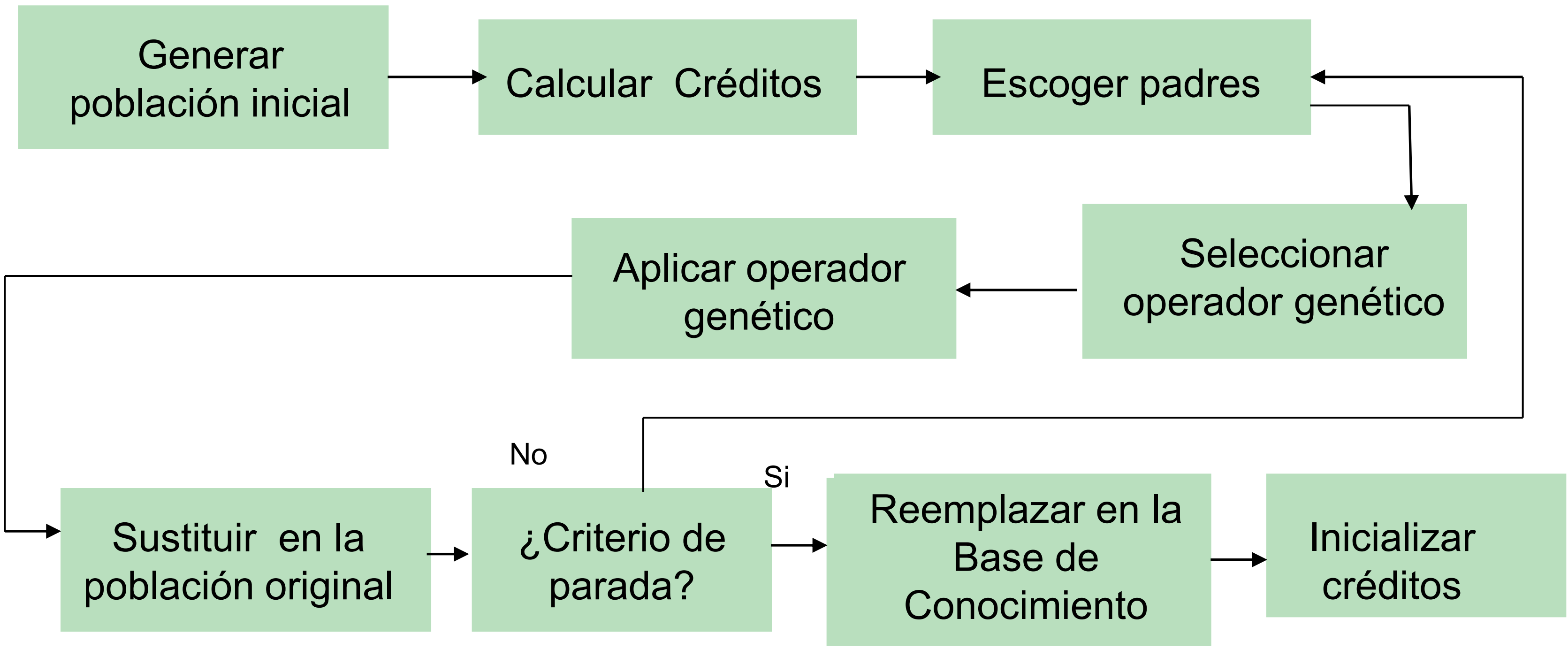
# SISTEMAS CLASIFICADORES

## Aprendizaje



# Aprendizaje

## EVOLUCIÓN DE REGLAS



# Aprendizaje en SCD

MAC

**Reglas**

$$C_i(t) = C_i(t-1) + Act_i(t) + n_i(t)$$

$C_i(t)$ representa el valor del crédito de la regla i en el tiempo $t$.
$Act_i(t)$ representa el grado de activación de la regla $i$ en el tiempo t.
$n_i(t)$ representa el numero de reglas que la regla $i$ ayudó a activar en el tiempo $t$.

**Funciones de Pertenencias**

OP: O $C_{\mu_{F(x,t)}}(t) = C_{\mu_F(x,t)}(t-1) + Act_i(t) * \mu_{F(x,t)}$

OP: Y $C_{\mu_{F(x,t)}}(t) = C_{\mu_F(x,t)}(t-1) + \dfrac{1}{Act_i(t) * \mu_{F(x,t)}}$

$C_{\mu_{F(x,t)}}$ es el valor del crédito de la función de pertenencia en el tiempo t.
$Act_i(t)$ es el grado de activación de la regla i en el tiempo t.
$\mu_{F(x,t)}$ es el grado de pertenencia del elemento x al conjunto difuso F en el tiempo t para la variable Difusa presente en la condición que tiene ese valor.

# Sist. Clasificador Difuso

1. Calcular el grado de activación de c/regla.
2. Calcular el crédito de c/regla activada.
3. Defuzificar la salida obtenida del sistema difuso por el mecanismo de inferencia difuso.
4. Calcular el error de identificación *er*.
5. Calcular el error promedio *ep*, para todos los patrones procesados.
6. Si *ep* es mas grande que el error limite dado por el usuario, entonces el SCD usa el mecanismo adaptativo basado en AGs.
   - 6.1 Escoger como padres las reglas con alto créditos valor).
   - 6.2 Aplicar los operadores genéticos.
   - 6.3 Reemplazar los individuos viejos por nuevos, según algún mecanismo de reemplazo.

# Sist. Clasificador Difuso

- Error de identificación para cada patrón.

$$er = |(y_s - y_d)/y_s|$$

$$ep = \sum_{i=1}^{m} er/m$$

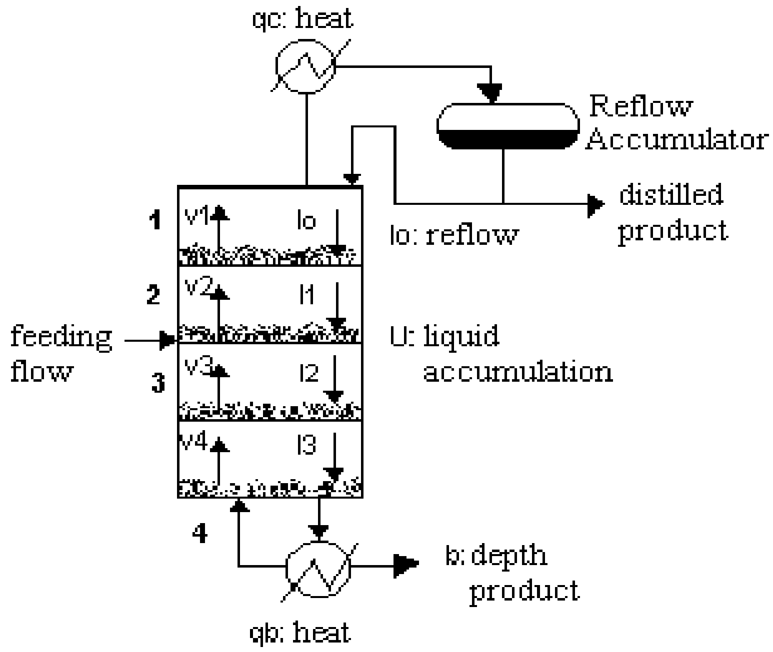
$y_s$ salida sistema real $y_d$ salida modelo, $m$ número de of patrones.

- Función de calidad
  - $S_i(t+1)=S_i(t)+Act_i(t)*\mu y_i/ea$ (3)

$Act_i\,(t)$ grado de activación regla $i$ en tiempo t, $ea$ es el error absoluto ($ea=y_s-y_d$) y $\mu y_i$ es el grado de membrecía.

# EJEMPLO

- Sistema de destilacion: separar 2 mezclas en varias fracciones con diferentes puntos de ebullicion.



# EJEMPLO

- Señal de entrada constante con un paso de amplitud=10 (U(t) = 10).

- Modelo teórico:

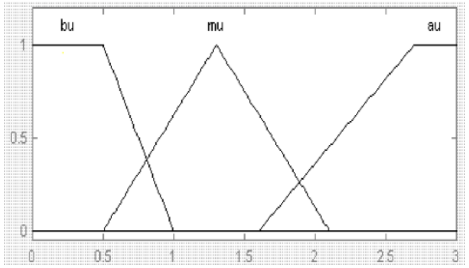
Y(t) =1.1148*Y(t-1) + 0.2525*Y(t-2) – 0.3823*Y(t-3) + 0.3294e-4*U(t-1)

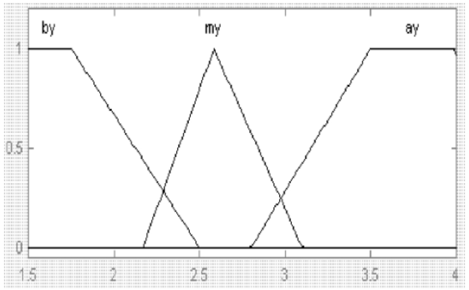
# EJEMPLO

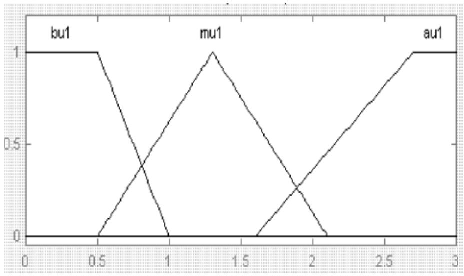
- Estructura regla genérica:

If U(t) and Y(t-1) then Y(t)

- Función de Membrecía de U(t), Y(t-1) y Y(t).



# EJEMPLO

- Se encontró para 87 iteraciones, mejor modelo difuso (min *ep*):

*If U(t) is mu and Y(t-1) is bu1 then Y(t) is ay*

*If U(t) is au and Y(t-1) is mu1 then Y(t) is by*

*If U(t) is mu and Y(t-1) is au1 then Y(t) is my*

*If i U(t) is au and Y(t-1) is au1 then Y(t) is ay*

*If i U(t) is mu and Y(t-1) is mu1 then Y(t) is ay*

*If i U(t) is au and Y(t-1) is au1 then Y(t) is my*

*If i U(t) is mu and Y(t-1) is bu1 then Y(t) is my*

*If i U(t) is bu and Y(t-1) is mu1 then  Y(t) is my*

*If i U(t) is mu and Y(t-1) is mu1 then Y(t) is by*