UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
MERIDA VENEZUELA

Aspectos básicos de los sistemas lógicos difusos

Jose Aguilar Castro

CEMISID

Justificación

Aquellos casos en los cuales la complejidad del problema y su carácter dinámico, o las incertidumbres alrededor del mismo, hacen difícil el establecimiento detallado de especificaciones. Parecen ser más apropiados adoptar enfoques que usen el aprendizaje por medio de la experiencia o el razonamiento heurístico para la toma de decisiones que permitan producir "soluciones confiables"

Lógica Difusa

- En la lógica clásica una proposición sólo admite dos valores: puede ser verdadera o falsa.

Lógica binaria

- Existen otras lógicas que admiten un tercer valor:

posiblemente

- La lógica difusa (o borrosa) es una de ellas, que se caracteriza por querer **cuantificar** esta incertidumbre

Lógica difusa

- Los conjuntos difusos fueron introducidos como una forma matemática de representar la "vaguedad" de la vida cotidiana.
- La idea fundamental es la de desarrollar un marco de trabajo para el tratamiento de la imprecisión.
- Nació alrededor del año 1965 con los trabajos de Zadeh en los Estados Unidos, en los cuales aplicó la lógica multivaluada a la teoría de conjuntos.

Lógica Difusa

- Zadeh introdujo el uso de una función, que expresaba el grado de pertenencia (o membresía) de los elementos a un conjunto dado, con valores en el rango entre 0 y 1.

- Estos últimos años ha tenido un gran interés en la comunidad científica a raíz de los avances en lógica difusa, los algoritmos difusos, el control difuso, el razonamiento difuso, etc.

Antecedentes de Lógica difusa

- En 1970 emergió el diseño de controladores lógicos difusos basados en reglas, gracias al trabajo de E. Mandami y sus colaboradores, quienes desarrollaron un sencillo y eficiente controlador para una máquina de vapor.

El trabajo de Mamdani abrió el camino para la implantación exitosa de sistemas lógicos difusos.

Hitos

- J. LUKASIEWICZ (AÑOS 20) ->

  PRINCIPIOS LÓGICA MULTIVALUADA

- L. ZADETH (1965) ->

  APLICACIÓN DE LA LÓGICA MULTIVALUADA A LA TEORÍA DE CONJUNTOS

- E. MAMDANI (MEDIADOS 70) ->

  PRIMERA APLICACION: CONTROLADOR BORROSO

Áreas de aplicación de la L.D.

- Actualmente, existen una gran cantidad de compañías de software comercial e industrial que están desarrollando programas basados en ésta teoría, especialmente en Japón.

- El área de mayor aplicación ha sido en control difuso de características físicas o químicas, tales como temperatura, corriente eléctrica, flujo de líquidos, etc.

Áreas de aplicación de la L.D.

Productos de Consumo	Automóviles y generación eléctrica	Procesos Industriales	Robótica y Manufactura
Cámaras y filmadoras (Cannon, Minolta, Ricoh, Sanyo) Lavadoras (Gldstar, LG, Whirpool) Refrigeradoras Aspiradoras	Control de vehículos (Nissan) Control de trasmisión (Mitsubishi, Mazda, Honda)	Refinación Destilación Plantas petroquímicas Incineración Producción de cemento	Robots (mitsubishi) Reconocimiento de patrones y Visión por ordenador

Areas de aplicación

- Los sistemas basados en lógica difusa imitan la forma en que toman decisiones los humanos, con la ventaja de ser mucho más rápidos.
- Son generalmente robustos y tolerantes a imprecisiones y ruidos en los datos de entrada.
- En la lógica difusa, se usan modelos matemáticos para mapear nociones subjetivas, como *caliente*/*tibio*/*frío*, a valores concretos que puedan ser manipuladas por los computadores.
- La lógica difusa se utiliza cuando la complejidad del proceso en cuestión es muy alta y no existen modelos matemáticos precisos: procesos altamente no lineales, cuando se envuelven definiciones/conocimiento no estrictamente definidos (o subjetivos).

LA BORROSIDAD

Por borrosidad entendemos el hecho de que una proposición pueda ser parcialmente verdadera y parcialmente falsa de forma simultánea.

- Replanteamiento radical de conceptos clásicos de verdad y falsedad, por el concepto de vaguedad o borrosidad. La verdad y/o falsedad no son más que casos extremos.
- Una persona no será simplemente alta o baja, sino que participará de ambas características parcialmente, mientras que en la zona intermedia de ambas alturas existirá una gradualidad por la que va dejando de ser alta.
- El concepto de borrosidad está enraizado en la mayor parte de nuestros modos de pensar y hablar.

Lógica Difusa

DIFERENCIAS ENTRE PROBABILIDAD Y BORROSO:

PROBABILIDAD:

- NÚMERO ENTRE 0 Y 1 PARA EXPRESAR LA POSIBLE OCURRENCIA DE UN EVENTO (NO HA OCURRIDO).
- SUPONE TENER UN MODELO DEL MUNDO.
- ES BASADA EN FRECUENCIAS HISTORICAS

BORROSO:

- GRADO DE POSIBILIDAD QUE UN PREDICADO SEA CIERTO.
- NO SE CONOCE MODELO DEL MUNDO.
- USA DESCRIPCIONES Y DESCRIBE AL MUNDO

Lógica Difusa

LÓGICA MULTIVALUADA EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS

=> GRADOS DE PERTENENCIA

=> CLASES CON LÍMITES MAL DEFINIDOS

$\Rightarrow$ GRADUALIDAD EN LOS CAMBIOS DE ESTADOS

$\Rightarrow$ ETIQUETAS LINGUISTICAS

Lógica Difusa

- **Conjuntos difusos:** son una generalización de los conjuntos ordinarios pero agregándoles un grado de pertenencia a cada elemento.
- **Grado de pertenencia** varia entre 0 y 1.
  - 0 significa que ese elemento no pertenece a un conjunto dado,
  - 1 significa que el elemento pertenece 100% a ese conjunto.

Conjuntos difusos

Un conjunto difuso posee como lógica subyacente una lógica multivaluada, y permite la descripción de conceptos en los cuales la transición entre poseer una propiedad y no poseerla, no son claros.

Definición de conjunto ordinario

Sea X un universo y sea S un subconjunto de X.

La función característica asociada con S es un mapa:

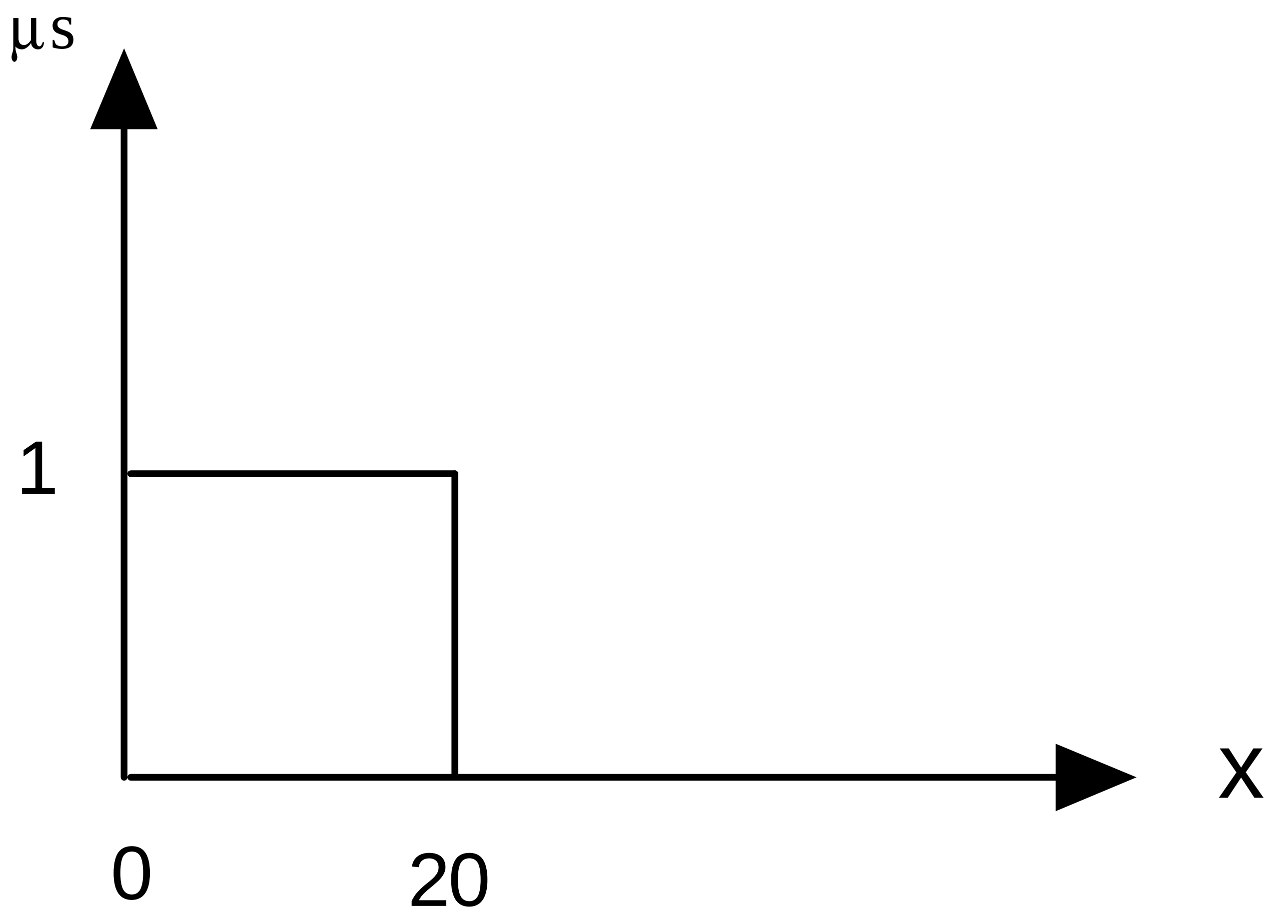
$$\mu_s : X \rightarrow \{0,1\}$$

tal que para cualquier elemento *x* del universo X,

$\mu_s(x) = 1$ si x es un miembro de S

$\mu_s(x) = 0$ si x no es un miembro de S

Ejemplo de conjunto ordinario



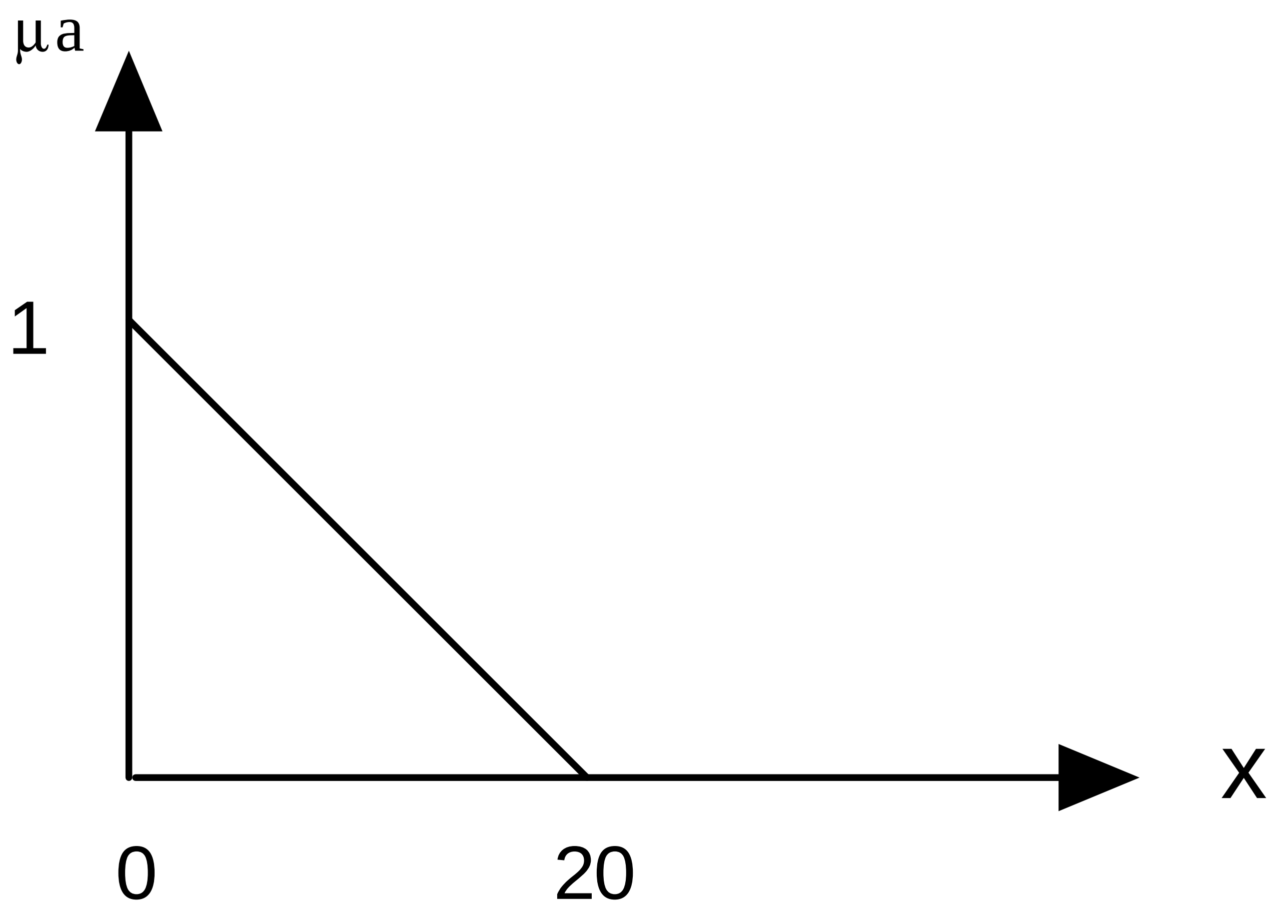
Definición de conjunto difuso

Sea X es un conjunto que representa un universo. Un subconjunto difuso A del universo X esta asociado a una función característica.

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1]$$

$\mu_A(x)$ indica el grado con el cual el elemento *x* del universo X es miembro del conjunto A

Ejemplo de conjunto ordinario



Lógica Difusa

Representación de los conjunto difuso

A={x/$\mu_A(x)$ **para x** $\in$ **X},** donde x es un elemento, $\mu_A(x)$ define la función de pertenencia y X es el Universo.

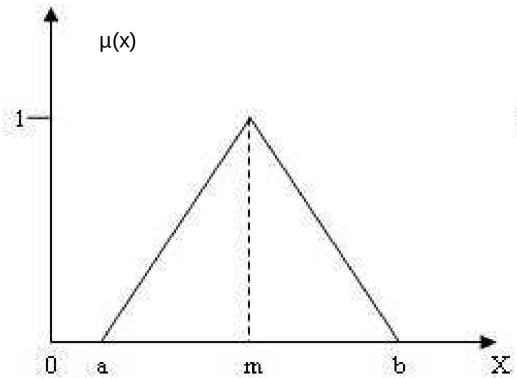
- **Función de pertenencia para un conjunto:** define el grado de pertenencia de cada elemento a ese conjunto.

Función de membrecía

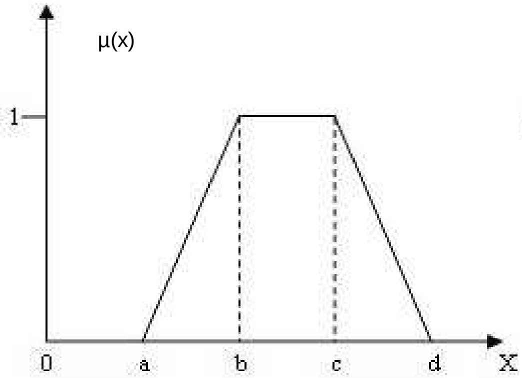
- En la teoría de conjuntos difusos, la función característica de un conjunto es llamada *función de membrecía o pertenencia,*

- Indica el grado con el que un elemento x_i pertenece a un conjunto X.

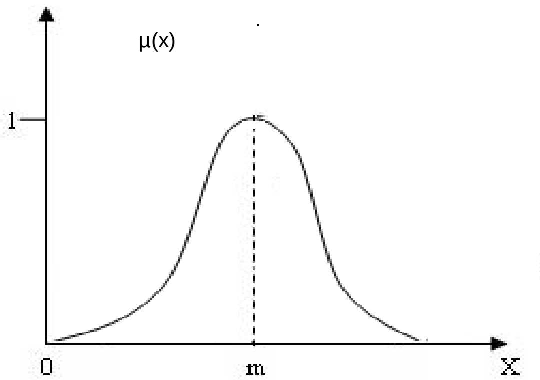
Ejemplos de funciones de membrecía



Triangular



Trapezoidal



Gaussiana

$$\mu_A(x) = \exp\left(\frac{-(x - \mu_A(x))^2}{2\sigma_A{}^2} \right)$$

Donde σ permite cambiar la forma

Ejemplo de Conjunto Difusa con funciones de membrecía

- U es universo recurso EDAD [0,120]

  U={x/x $\in$ [0, 120]

- Conjunto difusos joven y viejo

  Joven={(x/1, 0 $\leq$x $\leq$ 40} $\cup${x/1+(x-40)^{2} /40)$^{-1}$, x>40)}

  Viejo={(x/0, 0 $\leq$x $\leq$ 40} $\cup${x/1+(x-40)^{2})$^{-1}$, x>40)}

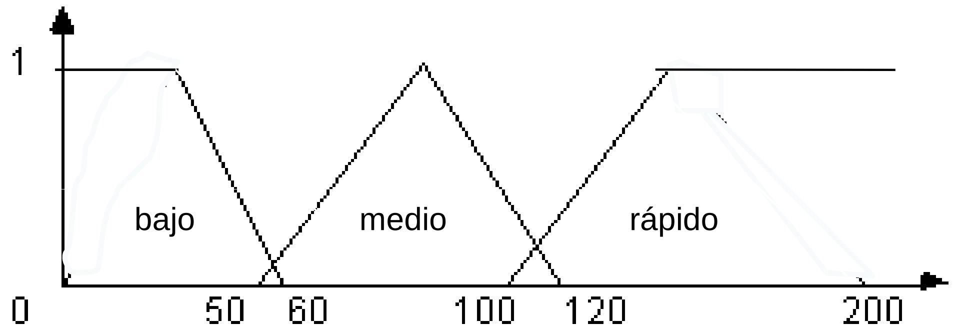
Nomenclatura de conjuntos difusos

Asuma que $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; entonces $A = \left\{ 0.7/x_1, 03/x_2, 1/x_3, 0/x_4 \right\}$ provee una representación de un subconjunto difuso de X.

En esta representación del subconjunto difuso A, un término de la forma a_1 / x_1 debe ser entendido como indicando que el elemento x_1 posee grado de membrecía a_1 en el subconjunto difuso A.

EJEMPLO DE CONJUNTOS DIFUSOS

- 3 CONJUNTOS DIFUSOS:
- RÁPIDO [100,200] , LENTO[0,60] , MEDIA[50,120]



- PARA UN CARRO QUE VA A UNA VELOCIDAD DE 55 KM/HORA:

$\mu_{\mathrm{BAJO}}(55) = 0.25$ $\mu_{\mathrm{MEDIO}}(55) = 0.25$ $\mu_{\mathrm{RAPIDO}}(55) = 0$

Bajo= {0/0, 0.5/15, 01/30, 0.5/45, 0/60}

Variables Lingüísticas

- Si una variable puede tomar valores de "palabras" en un lenguaje natural (por ejemplo, pequeño, rápido, etc.), entonces esa variable define una variable lingüística.
- Estas palabras generalmente son etiquetas de conjuntos difusos.
- Una variable lingüística toma valores lingüísticos(por ejemplo, para velocidad: bajo, rápido, etc.); pero cuando es instanciada toma números según función de pertenencia).

Variables Lingüísticas

- Variable lingüística = (x, A(x), U, G, M)

  Donde

  – X es el nombre de la variable

  – A(x) es el conjunto de términos lingüísticos de x

  – U es el universo donde se define cada valor de x

  – G es la regla sintáctica para generar las sentencias correctas en A

  – M es la regla semántica que asocia a cada valor x su significado

Variables Lingüísticas

- Ejemplo:
  - X es la variable lingüística *edad*
  - A(*edad*)= {niño, joven, adulto, anciano}
  - Universo de discurso U [0, 120]
  - G es la regla sintáctica para generar conjunto A
  - M es la regla semántica que asocia a cada valor x su significado

Lógica Difusa

- **Operaciones difusas,** para los conjuntos difusos A y B en el mismo universo U, tenemos (solo ultimo caso no):
  - Unión:

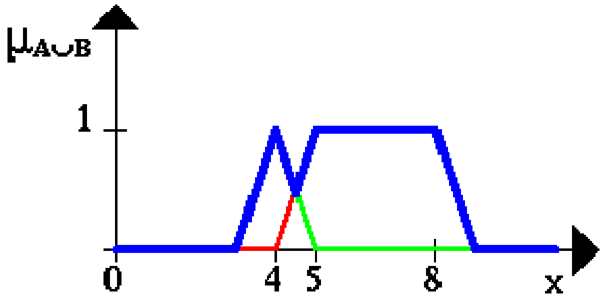
    $\mu_{A\cup B} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \{x/\max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall\, x \in U\}$
  - Intersección:

    $\mu_{A\cap B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \{x/\min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall\, x \in U\}$
  - Complemento de $\mu_A(x) = \{x/(1 - \mu_A(x) \quad \forall\, x \in U\}$
  - Producto cartesiano:

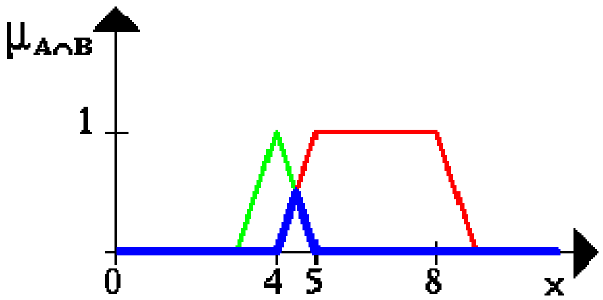
    $\mu_{AxB}(x, y) = \{(x,y)/\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad \forall\, x \in U, \forall\, y \in V\}$

Lógica Difusa

– Unión:

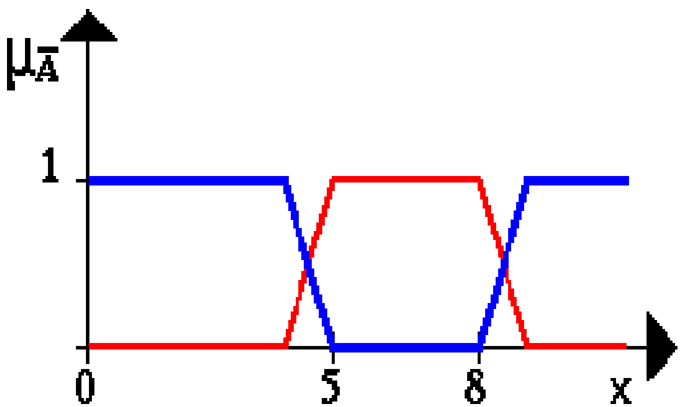


– Intersección:



Lógica Difusa

– Negación:



Operaciones sobre conjuntos difusos

Asuma que A y B son subconjuntos difusos de X. Su unión es un subconjunto difuso C de X, denotado por $C = A \cup B$, tal que para cada $x \in X$

$$C(x) = \mathrm{Max}[A(x), B(x)] = A(x) \vee B(x)$$

Ejemplo: Sea $X = \{a,b,c,d,e\}$; asuma que $A = \left\{ \frac{1}{a}, \frac{0.7}{b}, \frac{0.3}{c}, \frac{0}{d}, \frac{0.9}{e} \right\}$ y $B = \left\{ \frac{0.2}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{0.4}{c}, \frac{1}{d}, \frac{0.4}{e} \right\}$

Entonces $C = \left\{ \frac{1}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{0.4}{c}, \frac{1}{d}, \frac{0.9}{e} \right\}$

Operaciones sobre conjuntos difusos

Asuma que A y B son subconjuntos difusos de X, la intersección de A y B, denotado por D=A$\cap$B, es tal que para cada x$\in$X,

$$D(x)=Min[A(x),B(x)]=A(x) \wedge B(x)$$

Ejemplo: Considerando A y B del ejemplo anterior, entonces $D = \left\{ 0.2/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.4/e \right\}$

Operaciones sobre conjuntos difusos

Teorema: Asuma que A y B son subconjuntos difusos de X. Si $C=A\cup B$ y $D=A\cap B$ entonces

$D \subset C$

$A \subset C$ y $B \subset C$

$D \subset A$ y $D \subset B$

Operaciones sobre conjuntos difusos

Asuma que A y B son subconjuntos difusos de X. El complemento relativo de B respecto de A, denotado por E=A-B, es definido como el subconjunto difuso E de X donde para cada $x \in X$.

$$E(x)=Max[0,A(x)-B(x)]$$

Ejemplo: Asuma que $A = \left\{ 1/a, 0.3/b, 0.7/c, 0.6/d, 1/f \right\}$ y

$$B = \left\{ 1/a, 1/b, 0.3/c, 0/d, 0.5/f \right\}.$$

Entonces $E = A - B = \left\{ 0/a, 0/b, 0.4/c, 0.6/d, 0.5/f \right\}.$

Operaciones sobre conjuntos difusos

Conmutatividad

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

Distributividad

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Operaciones sobre conjuntos difusos

- IDEMPOTENCIA:

$$A \vee A = A$$

$$A \wedge A = A$$

- BORNES UNIVERSALES:

$$A \vee 0 = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \wedge 1 = A$$

Operaciones sobre conjuntos difusos

Propiedades que cumplen el complemento y el complemento relativo de subconjuntos difusos A y B de X.

Doble negación

$$\overline{(\overline{A})} = A$$

Leyes de Morgan

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\varnothing} = X; \ \overline{X} = \varnothing$$

Operaciones sobre conjuntos difusos

- Las funciones min y max son generalizaciones de las operaciones homónimas de los conjunto clásicos.
- En general:
  - La unión e intersección borrosa requieren funciones de forma tal que al aumentar uno de los conjuntos también aumente su unión e intersección
  - Dichas funciones deben ser conmutativas, distributivas y continuas

Las funciones que verifican tales propiedades son las que pertenecen a las clases conormas triangulares (conorma T) y normas triangulares (norma T)

Norma T

- Una norma T (denotada por "*") es una función de [0,1]x[0,1]-->[0,1] que incluye la intersección difusa, el producto algebraico, el producto acotado y el producto drástico, definidas por:
  – Intersección difusa: Min{x,y}
  – Producto algebraico: x.y
  – Producto acotado: x*y=max{0,x+y-1}
  – Producto drástico: {**x** si y=1, **y** si x=1, **0** si x,y<0}

donde $x,y \in [0,1]$

Conorma T

- La conorma T, denotada por $\dot{+}$, es una función de [0,1]x[0,1]-->[0,1] que incluye la unión difusa, la suma algebraica, la suma acotada y la suma drástica, definida por:
  - Unión difusa: Max{x,y}
  - Suma algebraica: x+y-xy
  - Suma acotada= $x \dot{+} y$=min{1,x+y}
  - Suma drástica: {**x** si y=0, **y** si x=0, **1** si x, y>0}

Con $x,y \in [0,1]$

Relaciones difusas

Sean U y V dos universos de discurso. Una relación difusa R es un conjunto difuso en el espacio producto UxV. Esto es, R posee una función de membrecía $\mu R(u,v)$, donde $u \in U$ y $v \in V$

Ejemplo: Si X={a,b,c} y Y={1,2} entonces

$$A = \left\{ {0.1}/{(a,1)}, {0.6}/{(a,2)}, {0.9}/{(b,1)}, {1}/{(b,2)}, {0}/{(c,1)}, {0.2}/{(c,2)} \right\}.$$

es una relación difusa sobre el espacio X y Y.

Relaciones difusas

Si A_1, A_2, A_k, A_n son subconjuntos difuso de x_1, x_2, x_k, x_n respectivamente, entonces sus productos cruzados $A_1 x A_2 x A_k x A_n$ es un subconjunto difuso de $X_1 x X_2 x X_k x X_n$, denotado por T= $A_1 x A_2 x A_k x A_n$, donde

$$T(x_1, x_2, x_k, x_n) = \mathrm{Min}_i[A_i(x_i)], \quad x_i \in X_i \quad i=1,2,...,n.$$

Ejemplo: Asuma que $A = \left\{ 1/a, 0.6/b, 0.3/c \right\}$ y $B = \left\{ 1/1, 0.5/2, 0/3 \right\}$ son subconjuntos difusos sobre los espacios X={a,b,c} y Y={1,2,3} respectivamente, entonces

$$AxB = \left\{ 1/(a,1), 0.5/(a,2), 0/(a,3), 0.6/(b,1), 0.5/(b,2), 0/(b,3), 0.3/(c,1), 0.3/(c,2), 0/(c,3) \right\}$$

Relaciones difusas

Asuma que A es una relación difusa sobre XxY. La proyección de A sobre X es un subconjunto difuso A° de X, que denotamos por $A^\circ = \mathrm{Proy}_x A$ y que definimos por $A^\circ(x) = \mathrm{Max}_x[A(x,y)]$

Ejemplo: Asuma X={a,b,c} y Y={1,2,3} y sea $A = \left\{ 1/(a,1), 0.6/(a,2), 0.4/(a,3), 0.5/(b,1), 0.8/(b,2), 0.2/(b,3), 0.3/(c,1), 0.1/(c,2), 0.3/(c,3) \right\}$

Entonces $\mathrm{Proy}_x A = \left\{ 1/a, 0.8/b, 0.3/c \right\}$ y $\mathrm{Proy}_y A = \left\{ 1/1, 0.8/2, 0.3/3 \right\}$

Principio de la extensión

si A y B son dos números difusos, su suma C=A+B, es también un numero difuso, donde para cada $z \in R$,

$$C(z) = \underset{\substack{\text{todos los } x,y \\ /\ x+y=z}}{\mathrm{Max}} [A(x) \wedge B(y)]$$

Mas generalmente asuma que $\perp$ es cualquier operación aritmética: adición, sustracción, multiplicación, división, o exponenciación y sean A y B dos números difusos. Entonces $A\perp B=C$, donde C es un número difuso tal que:

$$C(z) = \underset{\substack{\text{todos los} \\ x,y\in\Re}}{Max} [A(x) \wedge B(y) / (x \perp y)]$$

o equivalentemente para todo $z\in\Re$

$$C(z) = \underset{\substack{\text{todos los } x,y \\ /\ x\perp y=z}}{Max} [A(x) \wedge B(y)]$$

Principio de la extensión

Ejemplo: Asuma los conjuntos difusos

$$A = [0/6, 0.33/7, 0.66/8, 1/9, 0.5/10, 0/11]$$

$$B = [0/8, 0.5/9, 1/10, 0.8/11, 0.6/12, 0.4/13, 0.2/14, 0/15]$$

Para la suma difusa de estos números difusos con aplicación del principio de la extensión, obtenemos:

$$C = [0/14, 0/15, 0.33/16, 0, 5/17, 0.66/18, 1/19, 0.8/20, 0.6/21, 0.5/22, 0.4/23, 0.2/24, 0/$$

Medidas Borrosas

- Borrosidad: distancia de un conjunto difuso A a uno discreto C, tal que C contiene los valores de x para $\mu_A(x) > 0$

- Distancia entre dos conjuntos difusos A y C
  - Hamming $\quad \mathbf{f(A)} = \Sigma|\mu_A(x) - \mu_C(x)|$
  - Euclidea $\quad \mathbf{f(A)} = (\Sigma((\mu_A(x) - \mu_C(x))^2)^{1/2}$
  - …

- Similitud es igual a distancia

- Entropía Borrosa: cuanto aporta conjunto A a la descripción de la variable x

$$\mathbf{f(A)} = \Sigma\{\mu_A(x)\log\mu_A(x) + [1 - \mu_A(x)]\log[1 - \mu_A(x)]\}$$

Operaciones sobre conjuntos difusos

- Reglas de modificación: adverbio (bastante, muy, mas o menos, etc.) que se utiliza para especificar una propiedad mas concreta
- Son operaciones sobre la función de pertenencia, ejemplos:
  - Negación o "no": $NEG(\mu(x)) = 1 - \mu(x)$
  - Concentración o "muy": $CON(\mu(x)) = \mu(x)^2$
  - Dilatación o difusión o "algo", o "mas o menos" o "casi":

    $$DIL(\mu(x)) = \mu(x)^{0.5}$$
  - Intensificación o "bastante":

    $$INT(\mu(x)) = \begin{cases} 2\mu^2(x) & \text{si } 0 \le \mu(x) \le 0.5 \\ 1 - 2(1-\mu(x))^2 & \text{si } \mu(x) > 0.5 \end{cases}$$

Operaciones sobre conjuntos difusos

- Altura de un conjunto difuso: valor mas grande de su conjunto de pertenencia $\sup_{x \in X} \mu_A(x)$
- Conjunto difuso normalizado: Altura(A)=1
- Soporte de un conjunto difuso (soporte(A)): elementos de X que pertenecen a A con grado mayor a 0
- Núcleo de un conjunto difuso: elementos de X que pertenecen a A con grado mayor = 1
- Cardinalidad de un conjunto difuso $\mathrm{card}(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$
- α-corte: valores de X con grado menores a α
- Inclusión difusa

$$S(A,B) = \Sigma \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x)) / \mathrm{card}(A)$$

Aspectos básicos de Lógica Difusa

- Un conjunto difuso A de X es llamado normal si existe al menos un elemento

$$x \in X \ / \ A(x) = 1$$

Un conjunto difuso que no es normal es llamado sub-normal.

Aspectos básicos de Lógica Difusa

Ejemplo:

Asuma que X={a,b,c,d,e} y sean A y B subconjuntos difusos de X.

$$A = \left\{ {}^{1}\!/_{a}, {}^{0.3}\!/_{b}, {}^{0.2}\!/_{c}, {}^{0.8}\!/_{d}, {}^{0}\!/_{e} \right\}$$

$$B = \left\{ {}^{0.6}\!/_{a}, {}^{0.9}\!/_{b}, {}^{0.1}\!/_{c}, {}^{0.3}\!/_{d}, {}^{0.2}\!/_{e} \right\}$$

- A es un subconjunto normal, mientras que B es subnormal
- Altura(A)=1 y Altura(B)=0.9
- Soporte(A)={a,b,c,d} y Soporte(B)={a,b,c,d,e}
- Núcleo(A)={a} y núcleo(B)=Ø

Aspectos básicos de Lógica Difusa

Asuma que A y B son subconjuntos difusos de X. Decimos que A es un subconjunto de B, denotado por $A \subset B$

si $B(x) \geq A(x)$

para cada $x \in X$

Ejemplo: Asuma $A = \{0.1/a, 0.6/b, 1/c\}$ y $B = \{0.3/a, 0.9/b, 1/c\}$, entonces $A \subset B$.

Aspectos básicos de Lógica Difusa

- Un subconjunto difuso nulo de X es definido como un subconjunto difuso Ø de X tal que Ø(x)=0 para cada $x \in X$.

- La potencia del subconjunto A, denotada por potencia (A), es definida como

$$Potencia(A) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i)$$

Operaciones sobre conjuntos difusos

Asuma que A es un subconjunto difuso de X y α es cualquier numero no negativo; entonces A^{α} representara al conjunto difuso B de X tal que

$$B(x) = (A(x))^{\alpha}$$

Ejemplo: Asuma que $A = \left\{ 1/a, 0.6/b, 0.3/c, 0/d, 0.5/e \right\}$ entonces

$$A^2 = \left\{ 1/a, 0.36/b, 0.09/c, 0/d, 0.25/e \right\}$$

Puede verse fácilmente que si $\alpha > 1$ entonces $A^{\alpha} \subset A$ y si $\alpha < 1$ entonces $A^{\alpha} \supset A$.

Operaciones sobre conjuntos difusos

Asuma que A es un subconjunto difuso de X; el conjunto de nivel α de A, denotado por A_α, es un subconjunto ordinario de X consistente de todos los elementos en X para los cuales A(x)>α. Esto es

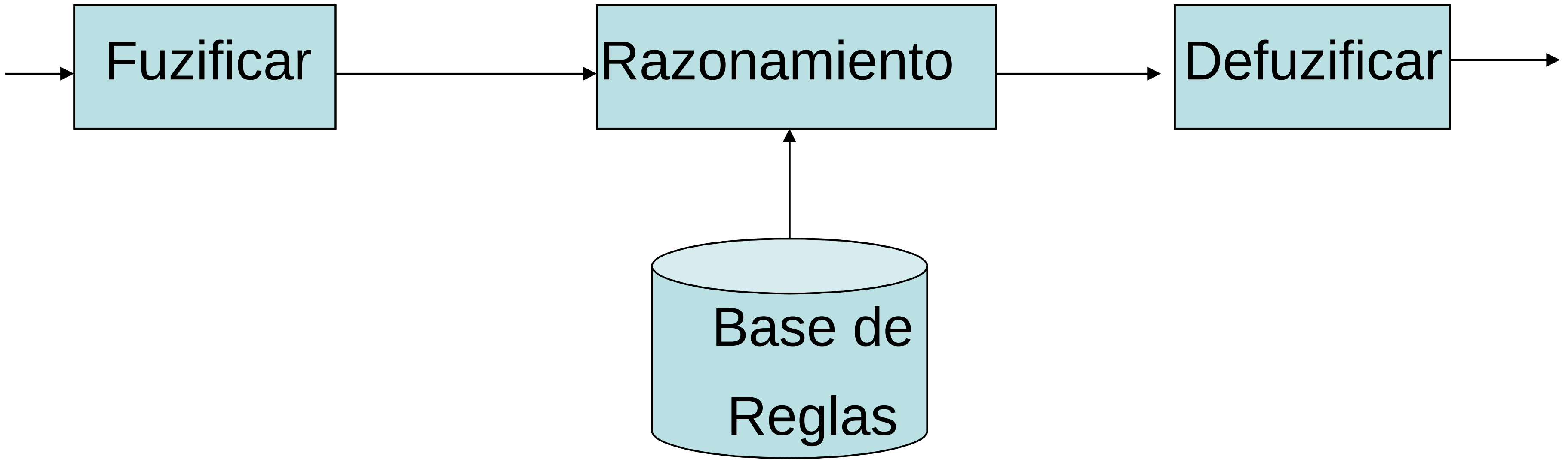
$$A_\alpha = \{x \,/\, A(x) \geq \alpha, x \in X\}$$

Ejemplo: Asuma que X={a,b,c,d,e} y $A = \left\{ {0.3}/{a}, {1}/{b}, {0.5}/{c}, {0.9}/{d}, {1}/{e} \right\}$, en este caso

$$A_\alpha = \{a, b, c, d, e\} \quad \text{para} \quad \alpha \geq 0.3$$

$$A_\alpha = \{b, d, e\} \quad \text{para} \quad \alpha \geq 0.9$$

Sistemas Difusos



Razonamiento Aproximado

- El concepto central de esta teoría es asignar conjuntos difusos como valores de variables y representar este par variable-valor difuso en sentencias o proposiciones lingüísticas.

El sistema de *Razonamiento aproximado* ofrece un mecanismo para modelar y hacer inferencias a partir de relaciones funcionales imprecisas y constituye la base para derivar algunos de los mecanismos de inferencia conocidos.

Base de Reglas

- La lógica difusa puede ser representada por implicaciones difusas del tipo

A => B (condición/acción)

si A entonces B, donde A y B son **proposiciones difusas.**

- La inferencia borrosa es basada en implicaciones borrosas y las reglas de inferencia derivadas de estas

=>*proceso deductivo llamado modus ponens.*

Por ejemplo, si *Ana es Joven* entonces *personalidad es inmadura.*

Proposiciones Difusas

- Proposición X es A,

  donde X es una variable que toma su valor de un dominio U y A es un conjunto difuso que pertenece a ese dominio

  La talla de Juan es Grande

- Imprecisión no difusa

  Juan Mide entre 1.80m y 1.90m

- Imprecisión difusa

  Juan mide casi 1.82m

Lógica Difusa

- Conocimiento:
  - Colección de proposiciones difusas (V es M)
  - Sobre un conjunto de variables (V variable difusa)
  - Sometidas a un proceso de inferencia
- Razonamiento Aproximado:
  - Conjunción(P1xP2) P1= Va es M P2=Vb es N

    => V es P tal que $\mu_P(z)= \mu_M(x)\wedge\mu_N(y)$

    Si Va=Vb es una intersección

    Si Va no tiene var. Comun Vb es prod. Cartesiano
  - Proyección P sobre Vb para P=Va es M es P1=Vb es N

    => $\mu_N(z)= \max_Q(\mu_M(x))$ Q son los x de Va que concuerdan con z en Vb para var. en común en los 2

Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

- Los elementos básicos de un sistema de razonamiento aproximado son la colección de variables simples *V1,…Vn* y una colección de conjuntos *X1,…Xn*, donde cada *Xi* es el *conjunto base* en el universo de discurso de la variable *Vi*.

- Dicho conjunto *Xi* contiene los valores posibles que puede tomar la variable *Vi*.

Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

- Una *variable conjunta* es una colección de una o más variables simples. Por ejemplo, Va,Vb y Vc son variables conjuntas definidas por Va=(V1, V2), Vb=(V1, V4, V5) y Vc=V1.

- Una *proposición* es una sentencia de la forma *V es M*, donde *V* es una variable conjunta, *M* es un conjunto difuso sobre el espacio del producto cartesiano de los conjuntos base de las variables simples que conforman a la variable conjunta.

Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

- El producto cartesiano “x” de los conjuntos base de las variables *Vi* está definido sobre el universo de V. Así, *M* es una relación difusa sobre X. Una proposición de la forma dada es llamada una *sentencia canónica*.

- Por ejemplo: Si V1 representa la presión de un tanque y V2 el nivel, entonces la variable conjunta V=(V1,V2) tiene como conjunto base los pares dados por la presión y el nivel.

Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

Sean Va y Vb dos variables conjuntas sobre las bases X y Y, respectivamente. Sean *P1=Va es M* y *P2=Vb es N* dos proposiciones. Su conjunción P1 y P2 es la proposición:

V es P

donde V es una variable conjunta que consiste en la unión de las variables simples que conforman a Va y Vb y P es un conjunto difuso sobre el dominio de V, tal que para *z* en el dominio de V:

$$\mu_P(z) = \mu_M(x) \wedge \mu_N(y)$$

donde x es el elemento en X que concuerda con *z* sobre el dominio que tienen en común. Análogamente, y es el elemento de Y que concuerda con *z* sobre el dominio que tienen en común.

Elementos de un Sistema de Razonamiento aproximado

- Si las variables en la operación conjunción son las mismas, la operación se reduce a la operación *intersección* entre conjuntos difusos.

$$(\text{Va es M}) \cap (\text{Va es N}) = \text{Va es M} \cap \text{N}$$

- Si Va y Vb no tienen variables comunes, la operación conjunta resulta en el clásico producto cartesiano. Esto es:

$$(\text{Va es M}) \cap (\text{Vb es N}) = (\text{Va,Vb}) \text{ es M x N}$$

La manipulación del conocimiento a través de proposiciones difusas en un sistema de razonamiento aproximado, está basada fundamentalmente en las operaciones de *implicación* y *proyección.*

Ejemplo Producto Cartesiano

Por ejemplo, sean V1, V2 y V3 variable simples sobre los conjuntos base X, Y y Z, respectivamente. Si definimos dos variables conjuntas Va=(V1, V2) y Vb=(V2, V3), y un par de proposiciones "Va es M" y "Vb es N", donde M y N son conjuntos difusos dados por:

$$M = \left\{ \frac{0.7}{(x1, y1)}, \frac{0.9}{(x1, y2)}, \frac{1}{(x2, y1)}, \frac{0.2}{(x2, y2)} \right\}$$

$$N = \left\{ \frac{0.8}{(y1, z1)}, \frac{1}{(y1, z2)}, \frac{0.4}{(y2, z1)}, \frac{1}{(y2, z2)} \right\}$$

La conjunción de estas proposiciones es la proposición "V es P", donde P es el conjunto difuso dado por:

$$P = \left\{ \frac{0.7}{(x1, y1, z1)}, \frac{0.7}{(x1, y1, z2)}, \frac{0.4}{(x1, y2, z1)}, \frac{0.9}{(x1, y2, z2)}, \right.$$

$$\left. \frac{0.8}{(x2, y1, z1)}, \frac{1}{(x2, y1, z2)}, \frac{0.2}{(x2, y2, z1)}, \frac{0.2}{(x2, y2, z2)} \right\}$$

Modus ponens generalizado

Sea U y V dos variables lingüísticas y A', A, B' y B conjuntos difusos. Entonces, el procedimiento de inferencia *modus ponens generalizado* se define como:

Premisa 1: U es A' (proposición de entrada)

Premisa 2: Si U es A entonces V es B (proposición que contiene la relación entre x y y).

Consecuencia: V es B' (proposición inferida).

La proposición inferida se obtiene a partir del mecanismo propuesto por la teoría de razonamiento aproximado, formando la conjunción de las premisas 1 y 2

Implicaciones difusas

Una implicación difusa A→B puede ser entendida como una regla difusa del tipo “Si – Entonces”.

Ejemplo: Si x es A entonces y es V; donde $x \in U$, $y \in V$ son variables lingüísticas.

Las expresiones (a) - (i) corresponden a interpretaciones de las reglas “Si – Entonces” basadas en criterios intuitivos o en generalizaciones de la lógica clásica.

Tipos de Implicaciones difusas

Sean A y B conjuntos difusos en U y V, respectivamente. Una implicación difusa, denotada por A→B, es un tipo especial de relación difusa en UxV con una de las siguientes funciones de membresía:

(a) Conjunción Difusa: $\mu_{A\to B}(u,v) = \mu_A(u) * \mu_B(v)$

(b) Disyunción Difusa: $\mu_{A\to B}(u,v) = \mu_A(u) \dot{+} \mu_B(v)$

(c) Implicación Material: $\mu_{A\to B}(u,v) = \mu_{\bar{A}}(u) \dot{+} \mu_B(v)$

(d) Cálculo Proposicional: $\mu_{A\to B}(u,v) = \mu_{\bar{A}}(u) \dot{+} \mu_{A*B}(v)$

Tipos de Implicaciones difusas

(e) Implicación borrosa por la regla del mínimo: $\mu_{A\to B}(u,v) = \min[\mu_A(u), \mu_B(v)]$

(f) Implicación borrosa por la regla del producto: $\mu_{A\to B}(u,v) = \mu_A(u)\mu_B(v)$

(g) Implicación borrosa por la regla aritmética $\mu_{A\to B}(u,v) = \min[1, 1 - \mu_{\bar{A}}(u) + \mu_B(v)]$

(h) Implicación borrosa por la regla Max-Min:

$$\mu_{A\to B}(u,v) = \max\{\min[\mu_A(u), \mu_B(v)], 1 - \mu_A(u)\}$$

(i) Implicación borrosa por la regla Booleana: $\mu_{A\to B}(u,v) = \max\{1 - \mu_A(u), \mu_B(v)\}$

Procedimiento para la obtención de la salida difusa

Si las entradas al SD son los valores $U_1 = x_1^*$ y $U_2 = x_2^*$, entonces un procedimiento para obtener el valor aproximado de la variable de salida difusa V de tal base de conocimiento es el siguiente:

1. Encuentre el nivel de tiro de cada una de las reglas.
2. Encuentre la salida para cada regla (implicación difusa)
3. Agregue las salidas de las reglas individuales para obtener la salida total del sistema.

Modelos Difusos

Basado en Reglas SI-ENTONCES con proposiciones difusas y razonamiento aproximado.

- SISO SI A ENTONCES B
- MISO SI U1 Y U2 Y U3 ... ENTONCES B
- MIMO SI U1 Y U2 Y U3 ... ENTONCES V1; V2; V3

Razonamiento Aproximado Básico
(CADA REGLA TIENE SU PESO)

- :SI (X ES Ai) ENTONCES (Y SERÁ Cj)

  $\mu_{Cj}(Y)$= PESO DE LA REGLA = $\mu_{Ai}(X)$

- SI (X_1 ES Ai) Y (X_2 ES Bj) ENTONCES (Y SERÁ Cj)

  $\mu_{Cj}(Y)$=PESO DE LA REGLA = MIN($\mu_{Ai}(X_1)$, $\mu_{Bj}(X_2)$)

- SI (X_1 ES Ai) O (X_2 ES Bj) ENTONCES (Y SERÁ Cm)

  $\mu_{Cm}(Y)$= PESO DE LA REGLA = MAX ($\mu_{Ai}(X_1)$, $\mu_{Bj}(X_2)$)

- R1: SI ... ENTONCES (Y1 SERÁ C) Y (Y2 SERA D)

  R2: SI ... ENTONCES (Y1 SERÁ C) Y (Y2 SERA E)

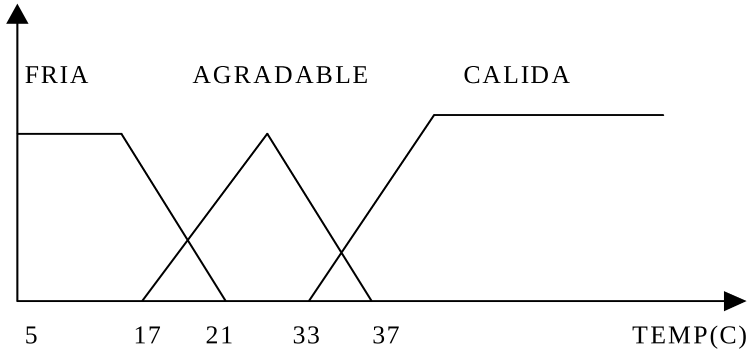
  μ_C(R1UR2)= MAX (PESO REGLA R1, PESO REGLA R2)

  μ_D(Y1)= PESO REGLA R1

  μ_E(Y2)= PESO REGLA R2

Lógica Difusa

- Ejemplo 1:

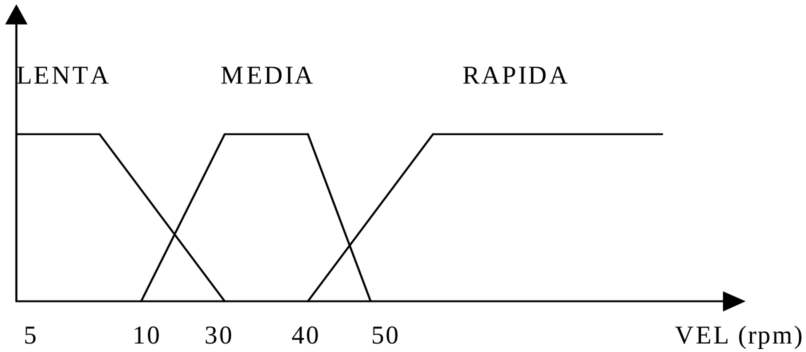


TEMP(18)={0.5/FRIA,0.2/AGRADABLE,0/CALIENTE }

BASE DE REGLAS: SI TEMP ES FRIA ENTONCES VEL SERA LENTA

SI TEMP ES AGRADABLE ENTONCES VEL SERA MEDIA

SI TEMP ES CALIDA ENTONCES VEL SERA MAXIMA



Algoritmo de inferencia para modelo SISO

SI (X ES Bi) ENTONCES (Y SERÁ Di)

1. Para cada Regla

- Grado de disparo de la regla i (nivel de disparo τde la i-ésima regla)

$$\tau_i = \mu_{Bi}(x)$$

- Conjunto difuso Fi dado como salida por la regla i (implicación difusa)

$Fi(y)=\tau_i \wedge \mu_{Di}(y)$ => $\mu_{Ri}(x,y)= \mu_{Bi}(x) \wedge \mu_{Di}(y)$

2. Agregación de las salidas de cada regla F(y)

Fi $F(y)=\vee i \ Fi(y)$ $R= \cup i \ Ri$

=> $\mu_R(x,y)= \vee i \ \mu_{Ri}(x,y)= \vee i(\mu_{Bi}(x) \wedge \mu_{Di}(y))$

Algoritmo de inferencia para modelo MISO

$$Ri = Bi1 \wedge Bi2 \wedge \ldots \wedge Bir \wedge Di$$

1. Para cada Regla

   - Grado de disparo de la regla i

$$\tau_i = (\vee \wedge \mu_{Bi1}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{Bir}(x_r))$$

   - Conjunto difuso Fi dado como salida por la regla i

$$Fi(y) = \tau_i \wedge \mu_{Di}(y)$$

2. Agregación de las salidas de cada regla F(y)

$$F(y) = \vee i \; Fi(y)$$

Cálculo del grado de disparo para modelos MIMO

- Para el caso de modelos MIMO, siendo considerados como un conjunto de subsistemas MISO, el cálculo de τi para la i-ésima regla de cada subsistema es:

$$\tau i = \mu_{Bi1}(x_1^*) \wedge \ldots \wedge \mu_{Bir}(x_r^*)$$

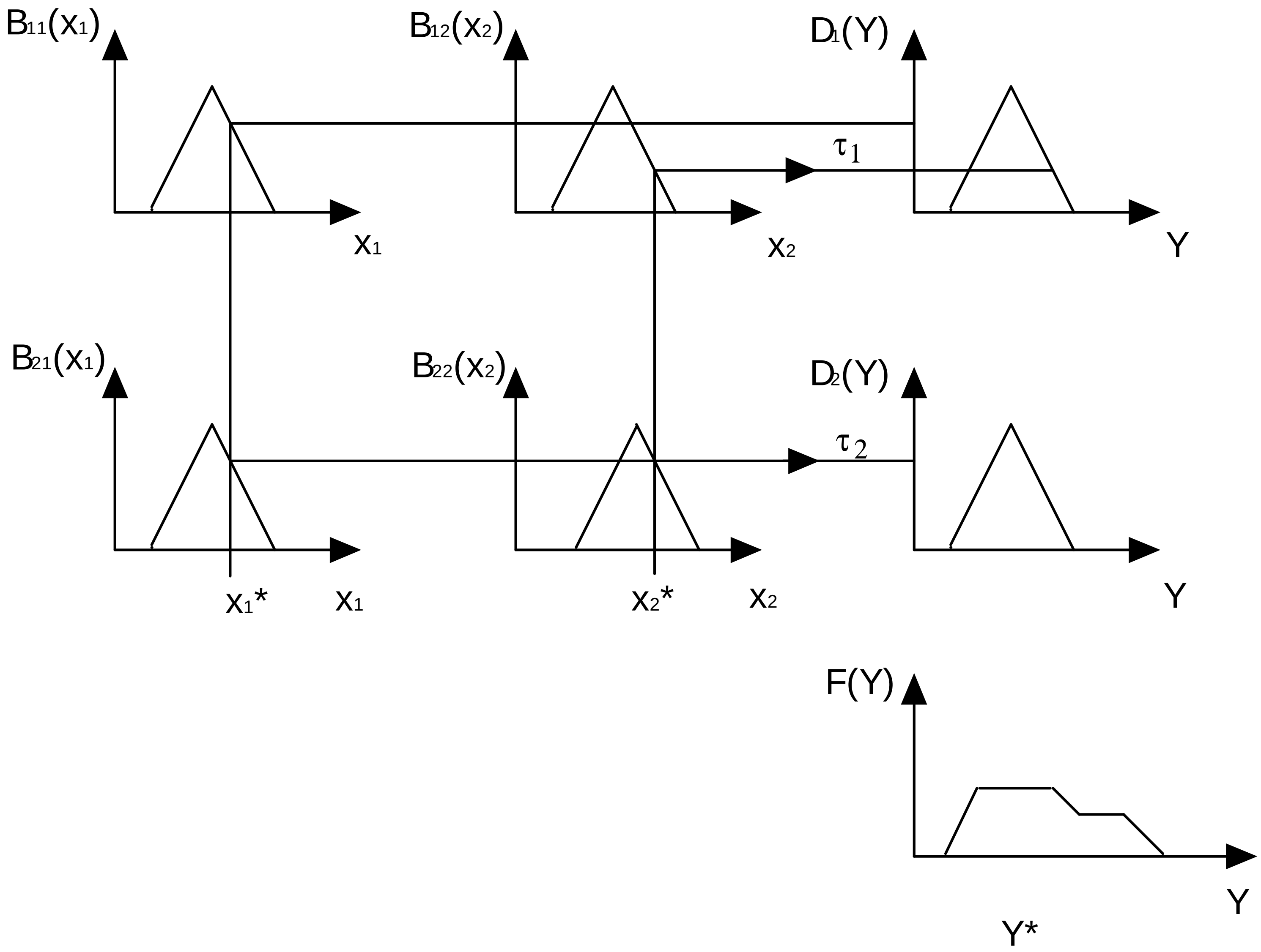
Cálculo del grado de disparo para modelos MIMO

- En el modelo propuesto por Takagi-Sugeno-Kang, el mecanismo de inferencia propone el grado de disparo de cada regla híbrida dada por la ecuación

$$\tau_i = \mu_{Bi1}(u_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{Bir}(u_r)$$

el cual proviene de considerar la difusificación del valor puntual u_j, j=1,…,r, por el mecanismo de difusificación sencilla derivado de una función matemática.

Ilustración gráfica del algoritmo de razonamiento de un SD tipo Mamdani



Lógica Difusa (Modelo de Mamdani)

- EJEMPLO 2:

R1: SI e ES NEG Y ∇e ES NEG ENTONCES ∇u ES NEG

R2: SI e ES NEG Y ∇e ES CERO ENTONCES ∇u ES NEG

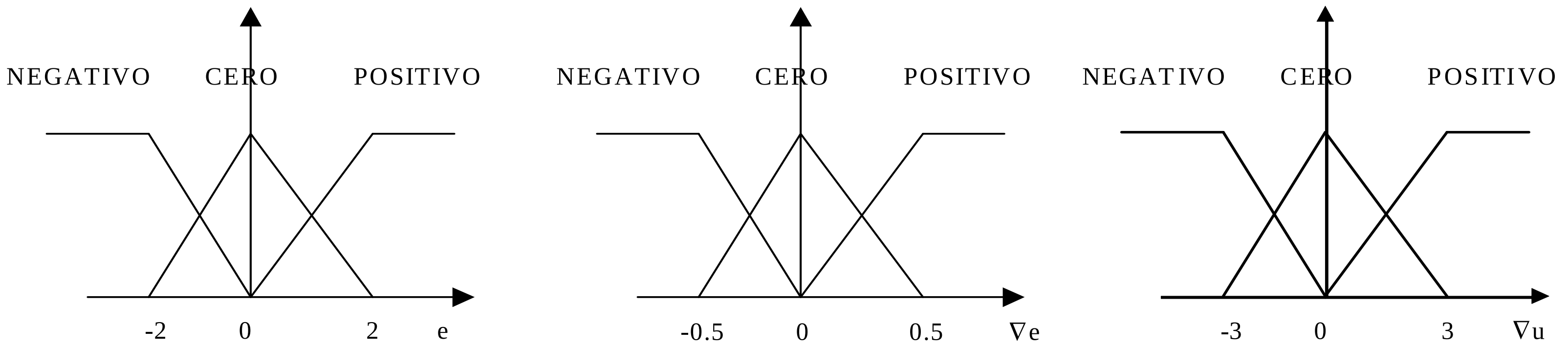
R3: SI e ES NEG Y ∇e ES POSIT ENTONCES ∇u ES CERO

R4: SI e ES CERO Y ∇e ES NEG ENTONCES ∇u ES NEG

R5: SI e ES CERO Y ∇e ES CERO ENTONCES ∇u ES CERO

R6: SI e ES CERO Y ∇e ES POSIT ENTONCES ∇u ES POSIT

…



Lógica Difusa (Modelo de Mamdani)

- EJEMPLO 2:

SUPONER DE ENTRADA e=-2.1 Y ∇e=0.5

=> R3 UNICA QUE SE ACTIVA

ADEMAS, EL UNIVERSO DE DISCURSO DISCRETO DE

∇e ES {-2, -1,-0.5, -0.25, 0. 0.25, 0.5, 1, 2}
e ES {-4, -3, -2, -1, 0. 1, 2, 3, 4}
∇u ES {-6, -4.5,-3, -1.5, 0. 1.5, 3, 4.5, 6}

=> $\mu_N(\nabla u) = [1, 1, 1, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0]$
$\mu_C(\nabla u) = [0, 0, 0, 0.5, 1, 0.5, 0, 0, 0]$
$\mu_P(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$

GRADO MEMBRESIA DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS DE SALIDAS

$\mu_{F1}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ $\mu_{F2}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$
$\mu_{F3}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0.5, 1, 0.5, 0, 0, 0]$ $\mu_{F4}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$
$\mu_{F5}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ $\mu_{F6}(\nabla u) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$