



UNIVERSIDAD  
DE LOS ANDES  
MERIDA VENEZUELA

# sistemas lógicos difusos: 2da parte

Jose Aguilar Castro  
CEMISID

# DEFUSIFICACIÓN

CONSISTE EN DETERMINAR VALOR  
NUMÉRICO DESDE UNA SALIDA  
BORROSA.

- FUNCION DE PERTENENCIA DEL CONJUNTO BORROSO DE SALIDA

$$\begin{aligned}\mu_X(Y) &= \text{PESO REGLA } R_i * \mu_{X_i}(Y) + \text{PESO REGLA } R_j * \mu_{X_j}(Y) + \dots \\ &= \text{MIN}(\text{PESOREGLA } R_i, \mu_{X_i}(Y)) + \text{MIN}(\text{PESOREGLA } R_j, \mu_{X_j}(Y))\end{aligned}$$

# Defusificación sencilla

- Dado un valor puntual  $x^* \in X$ , el mecanismo de difusificación consiste en crear un conjunto difuso  $A$ , cuya función de pertenencia es aquella donde para cualquier  $x \in X$  su valor es cero excepto en el valor de  $x^*$ , donde toma el valor de 1. Esto es:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \neq x^* \\ 1 & \text{Si } x = x^* \end{cases}$$

Nótese que este conjunto difuso así considerado no es mas que un conjunto ordinario con un único elemento dado por  $x^*$

# TÉCNICAS CLÁSICAS DEFUZIFICACIÓN

- **CENTROIDE:** TRATA DE CALCULAR EL CENTRO DE MASA

$$Y = \sum_k Y_k \mu(Y_k) / \sum_k \mu(Y_k)$$

- **MÁXIMO:** MAYOR VALOR DE SALIDA Y SE LE CALCULA SU CENTROIDE

$$Y = \text{MAX} (Y_1 \rightarrow \mu(Y_1), Y_2 \rightarrow \mu(Y_2), \dots)$$

# Método del Centro del Área (MCA)

- El MCA define el valor defusificado de un conjunto difuso  $F$  como su centroide difuso. Esto es

$$y^* = \frac{\int_r y F(y) dy}{\int_r F(y) dy}$$

# Método del Centro del Area (MCA)

- El cálculo del valor desdifusificado con el MCA es simplificado si consideramos un universo finito  $Y$ . Así,  $F(y)$  será una función de membresía discreta:

$$y^* = \frac{\sum_{J=1}^n F(y_J) y_J}{\sum_{J=1}^n F(y_J)}$$

## Método de Media de Máximos (MMM)

- El MMM determina el valor desdifusificado como una media de todos los valores del universo que poseen grado de membresía máximo. Esto es

$$y^* = \frac{1}{q} \sum_{j \in J^*} y_j$$

# Lógica Difusa

- Ejemplo 1:

$$Y = [\text{CENTROIDE}_{\text{LENTA}} \mu_{\text{LENTA}}(Y) + \text{CENTROIDE}_{\text{MEDIA}} \mu_{\text{MEDIA}}(Y)] / [\mu_{\text{LENTA}}(Y) + \mu_{\text{MEDIA}}(Y)] = \\ (10*0.5 + 35*0.2) / (0.5 + 0.2) = 17,14 \text{ rpm}$$

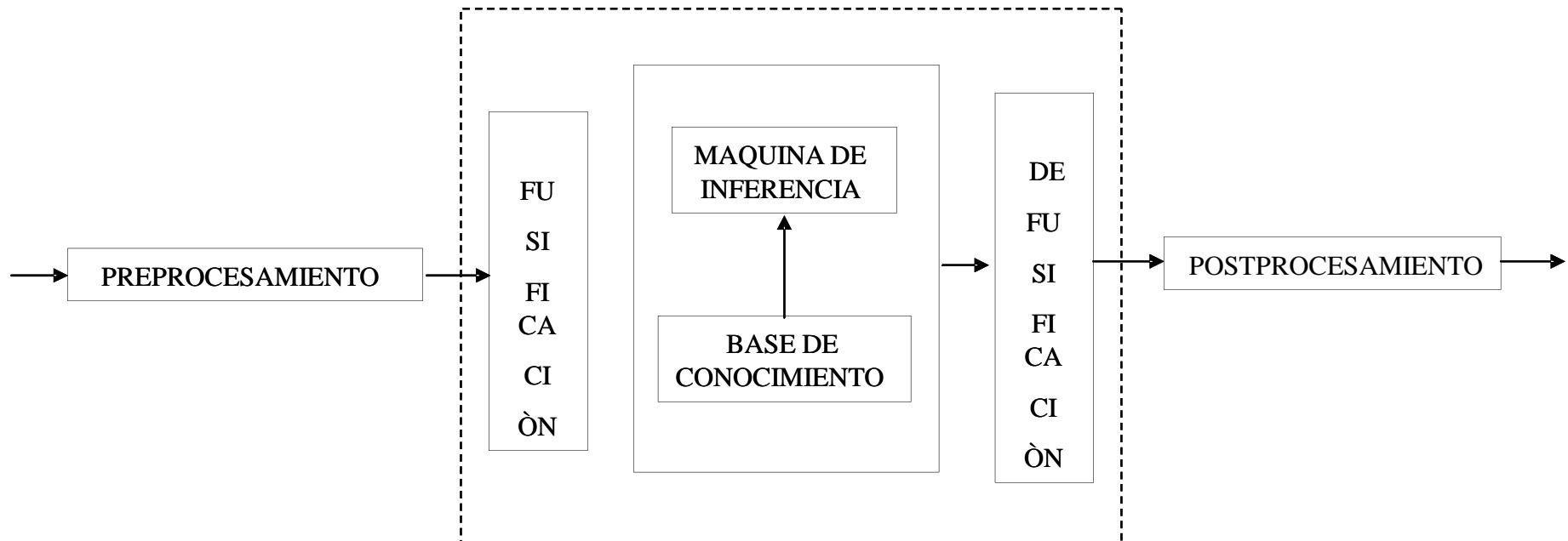
- EJEMPLO 2:

$$\nabla u = [0.5(-1.5) + 1(0) + 0.5(1.5)] / (0.5 + 1 + 0.5) = 0$$

# Definición de Fusificador

El fusificador realiza una transformación de un punto de un conjunto ordinario  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$  a un conjunto difuso  $A' \in U$ .

# componentes básicos en el diseño de un sistema lógico difuso



# Lógica Difusa

Pasos a seguir para aplicar la lógica difusa en un problema:

- Identificar las variables y sus posibles rangos de valores.
- Determinar las funciones de pertenencia de esos valores a expresiones descriptivas.
- Determinar las reglas que rigen el comportamiento del sistema.
- Seleccionar algún método para darle un valor preciso a los resultados descriptivos.

# Fuentes de información para sistemas lógicos difusos

- En la mayoría de los sistemas ingenieriles, existen dos fuentes importantes de información:
  - La proveniente de sensores
  - La proveniente de la experticia humana.
- La incorporación sistemática y eficiente de información lingüística facilita el diseño de aplicaciones con miras a incorporar características como adaptación, aprendizaje y autonomía.

# Incorporación de información en Sistemas Lógicos Difusos

- La incorporación de información numérica y lingüística en el diseño de aplicaciones de lógica difusa en procesos, puede ser realizada siguiendo alguno de los métodos siguientes:
  - Usando la experiencia de expertos y conocimientos de Ingeniería.
  - Basado en las acciones que realizan los operadores.
  - Basado en auto-organización o aprendizaje.

A continuación se presenta una  
Metodología para el diseño de  
aplicaciones usando sistemas  
lógicos difusos

# **Etapa 1: Análisis y descripción del problema.**

## Fase 1.1.- Descripción General del Problema:

- 1.1.1.- Familiarización con el proceso sobre el cual se desea realizar el Sistema Lógico Difuso.
- 1.1.2.- Familiarización con los ambientes computacionales donde se encuentran los datos a ser utilizados.
- 1.1.3.- Definición detallada del problema que motiva el desarrollo del Sistema Lógico Difuso.

# **Etapa 1: Análisis y descripción del problema.**

- Fase 1.2.- Análisis de Factibilidad para el desarrollo del Sistema Lógico Difuso.
- Fase 1.3.- Análisis de datos
- Fase 1.4.- Elección de la fuente de conocimiento

## **Etapa 2: Especificación de requerimientos**

- Fase 2.1.- Estimación del perfil de los usuarios finales del Sistema Lógico Difuso.
- Fase 2.2.- Determinación de los requerimientos de información.
- Fase 2.3.- Determinación de los requerimientos funcionales

# **Etapa 2: Especificación de requerimientos**

- Fase 2.4.- Determinación de los requerimientos de entrada de datos:
  - 2.4.1.- Selección de las posibles variables de entrada al Sistema Lógico Difuso.
  - 2.4.2.- Identificación de las fuentes de datos.
  - 2.4.3.- Especificación de los procesos de adquisición de datos.
  - 2.4.4.- Especificación de los procesos de generación de parámetros.
  - 2.4.5.- Caracterización de la interoperabilidad entre las bases de datos que se requieren en la implantación.

## **Etapa 2: Especificación de requerimientos**

- Fase 2.5.- Definición de los requerimientos de hardware y software para la implantación del Sistema Lógico Difuso:
  - 2.5.1.- Especificación de la plataforma de hardware que se utilizará para el desarrollo y operación del Sistema Lógico Difuso.
  - 2.5.2.- Determinación, análisis y selección de las herramientas de software disponibles en el mercado para el desarrollo de Sistema Lógico Difuso.
- Fase 2.6.- Verificación de los requerimientos con el usuario.

## **Etapa 3: Análisis de costos, tiempo y recursos.**

- Fase 3.1.- Elaboración del plan de actividades de desarrollo e implantación.
- Fase 3.2.- Estimación del tiempo requerido para el desarrollo del Sistema Lógico Difuso.
- Fase 3.3.- Estimación de los recursos computacionales (hardware-software) requeridos para el desarrollo del Sistema Lógico Difuso.
- Fase 3.4.- Estimación de los costos de desarrollo.

# **Etapa 4: Diseño de Sistema Lógico Difuso**

- Fase 4.1.- Pre-procesamiento, puede involucrar:
  - Cuantificación en conexión con el muestreo y redondeo.
  - Normalización o escalamiento a un rango estandarizado.
  - Filtraje de las señales para la remoción de ruidos.
  - Pre-mediación para la obtención de tendencias de corto y largo plazo.
  - Combinación de varias mediciones para obtener indicadores claves.
  - Diferenciación e integración o sus equivalentes discretos

# **Etapa 4: Diseño de Sistema Lógico Difuso.**

- Fase 4.2.- Fusificación: En esta fase cada dato de entrada es convertido a grados de membresía asignado a una o varias funciones de membresía.
- Fase 4.3.- Base de Reglas: Se modela lingüísticamente el sistema o proceso. Las reglas pueden utilizar varias variables, tanto en sus antecedentes como en sus consecuentes.

# **Etapa 4: Diseño de Sistema Lógico Difuso.**

- Fase 4.4.- Motor de Inferencia: En esta fase se construye el mecanismo de toma de decisiones. El motor de inferencia permite establecer los valores de membresía en las variables del antecedente y del consecuente de cada regla, a objeto de establecer la salida que proporciona la base de reglas ante las entradas dadas.

# **Etapa 4: Diseño de Sistema Lógico Difuso.**

- Fase 4.5.- Defusificación: Esta fase involucra la transformación de los valores difusos, que proporciona el motor de inferencia, en valores ordinarios.
- Fase 4.6.- Post-procesamiento: En esta fase, la salida desfusificada definida en un universo estándar debe ser escalada en términos de unidades ingenieriles.

## **Etapa 5: Diseño asociado a la herramienta computacional.**

- Fase 5.1.- Diseño preliminar de la arquitectura del Sistema computacional.
- Fase 5.2.- Selección de la herramienta computacional de acuerdo a los requerimientos surgidos en la etapa de diseño del sistema lógico difuso.
- Fase 5.3.- Diseño preliminar de los procesos de adquisición y almacenamiento de datos

# **Etapa 5: Diseño asociado a la herramienta computacional.**

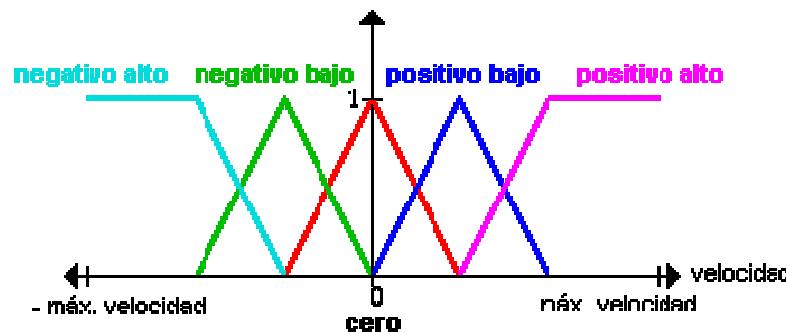
- Fase 5.4.- Diseño preliminar de los procesos de interconexión.
  - 5.4.1.- Integración Interna.
  - 5.4.2.- Integración Externa.
  - 5.4.2.- Selección de software auxiliar.
- Fase 5.5.- Verificación del diseño preliminar del Sistema computacional

# **Etapa 6: Desarrollo e Implementación del Sistema Lógico Difuso**

- Fase 6.1.- Construcción del prototipo.
- Fase 6.2.- Validación del prototipo.
- Fase 6.3.- Construcción del modelo operacional
- Fase 6.4.- Prueba y depuración
- Fase 6.5.- Mantenimiento y actualización.

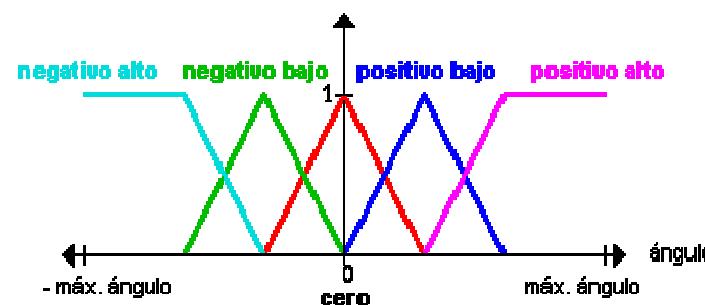
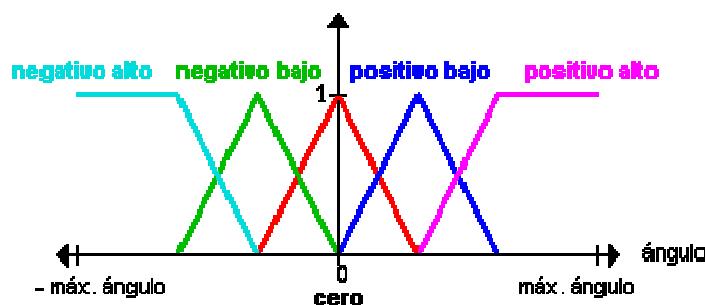
# Ejemplo

- **El péndulo invertido:** El problema está en equilibrar una pértiga sobre una plataforma móvil que puede moverse en dos únicas direcciones, a la izquierda o a la derecha.
- Se define (subjetivamente) cual es la velocidad del anden: alta, baja, etc.



# Ejemplo

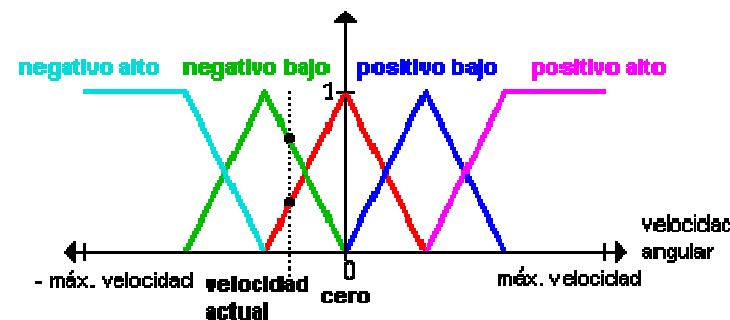
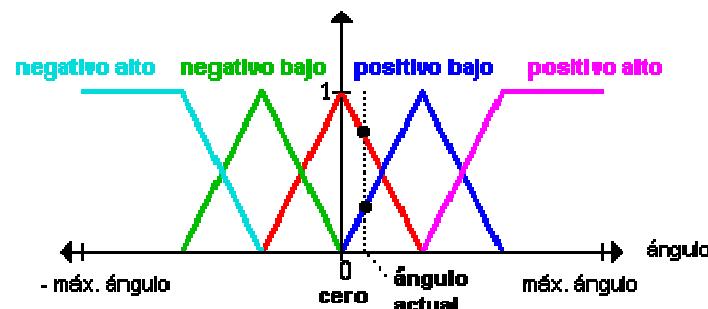
- Lo mismo se hace para el ángulo entre la plataforma y la pértila, y la velocidad angular de este ángulo:



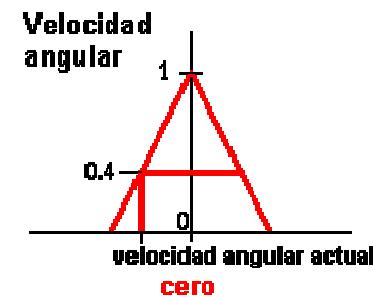
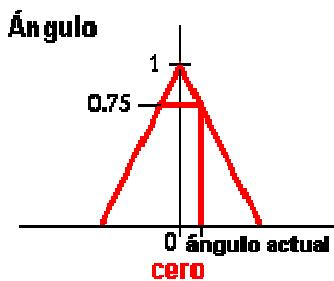
- Algunas reglas del sistema difuso
  - Si el ángulo es cero y la velocidad angular es cero entonces la velocidad será cero.
  - Si el ángulo es cero y la velocidad angular es positiva baja entonces la velocidad será positiva baja.

# Ejemplo

- Consideremos un valor actual para el ángulo y velocidad angular

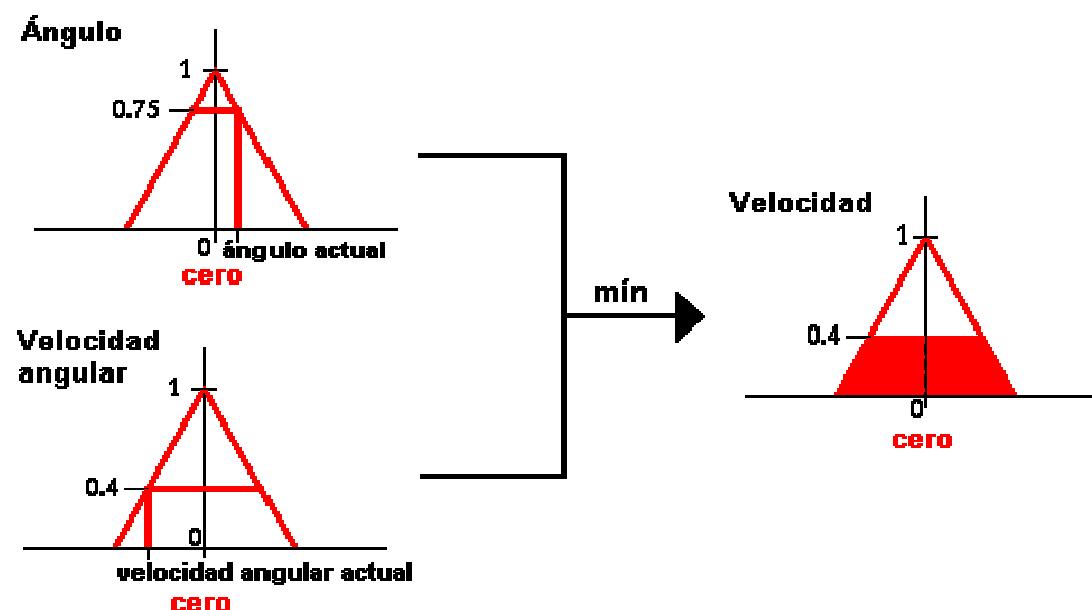


- Ahora mostraremos como aplicar nuestras reglas a esta situación real. Veamos como aplicar la regla
  - Si el ángulo es cero y la velocidad angular es cero entonces la velocidad será cero.



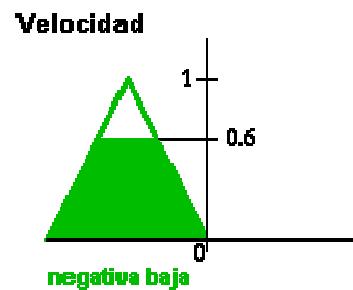
# Ejemplo

- Como las dos partes de la condición de nuestra regla están unidas por una Y (operación lógica AND) calculamos el  $\min(0.75, 0.4) = 0.4$  y cortamos el conjunto borroso "cero" de la variable "velocidad" a este nivel (según nuestra regla):

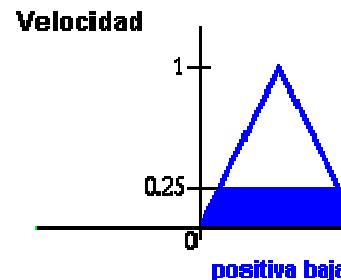


# Ejemplo

- Por su parte, el resultado de las reglas
  - Si el ángulo es cero y la velocidad angular es negativa baja entonces la velocidad será negativa baja

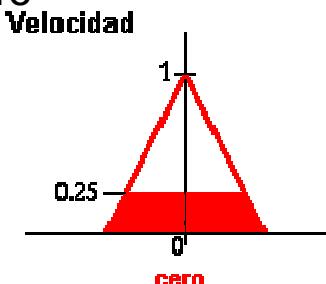


- Si el ángulo es cero y la velocidad angular es positiva baja entonces la velocidad será positiva baja

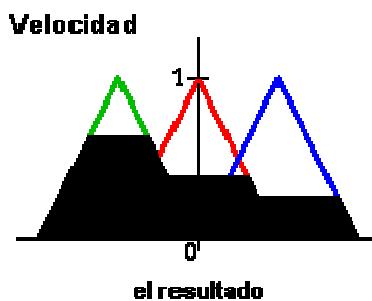


# Ejemplo

- Si el ángulo es positivo bajo y la velocidad angular es negativa baja entonces la velocidad será cero



- Estas cuatro reglas solapadas desembocan en un resultado único:



Tenemos que escoger un valor representativo como salida final usando alguno de los métodos de defuzzification



# CASO DE ESTUDIO 2

## SISTEMA CLASIFICADOR DE LIRIOS

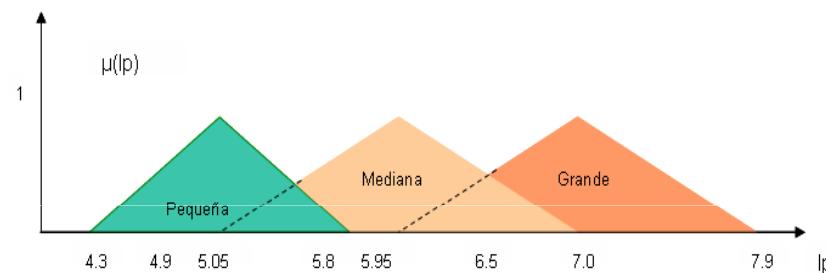
- Clasificar correctamente las variedades de flor Iris (Lirios), respecto a las clases: setosa, virgínica y versicolor.
- Los atributos utilizados para la clasificación son la longitud y ancho de los pétalos, y el largo y ancho de los tallos.

### Variables

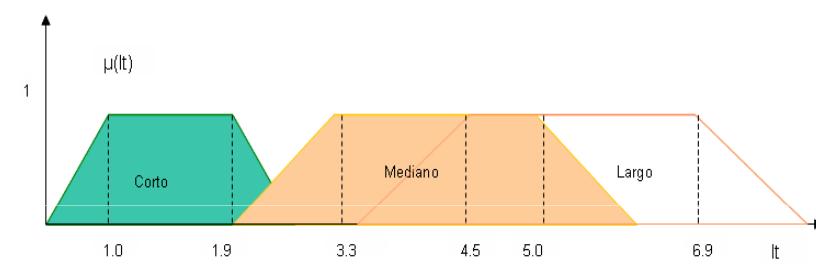
- Variables de entrada: ancho del pétalo (ap), longitud del pétalo (lp), ancho del tallo (at) y longitud del tallo (lt).
- Variables de salida: Clase.

# CASO DE ESTUDIO 2

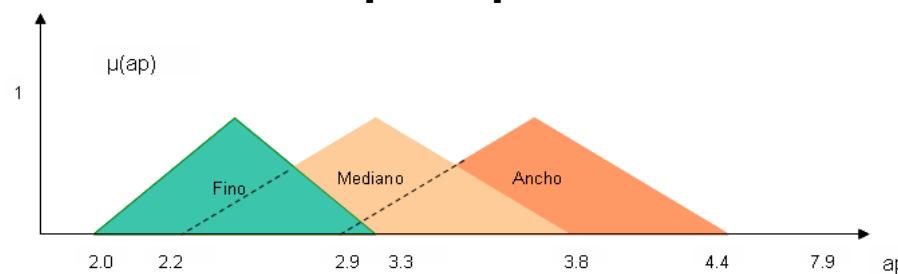
## SISTEMA CLASIFICADOR DE LIRIOS



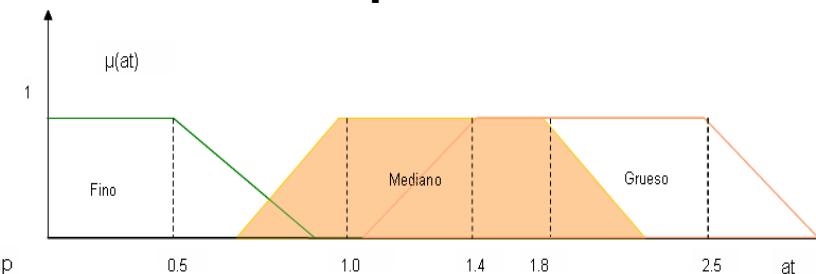
Funciones de pertenencia para  $lp$



Funciones de pertenencia para  $lt$



Funciones de pertenencia para  $ap$



Funciones de pertenencia para  $at$

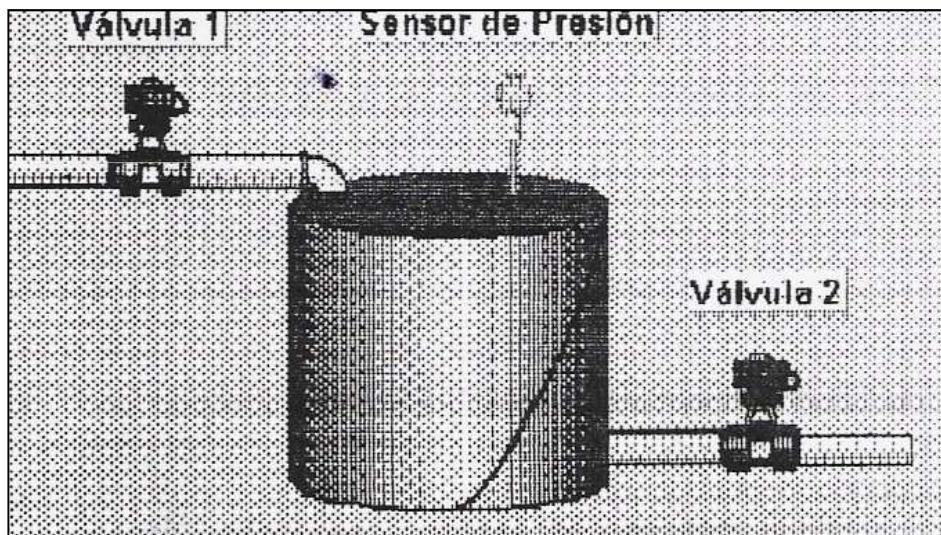
# CASO DE ESTUDIO 2

## SISTEMA CLASIFICADOR DE LIRIOS

1. Si  $l_p$  es Pequeña Y  $a_p$  es Ancho Y  $l_t$  es Corto Y  $a_t$  es Fino Entonces Clase es Setosa.
2. Si  $l_p$  es Mediano Y  $a_p$  es Fino Y  $l_t$  es Mediano Y  $a_t$  es Mediano Entonces Clase es Virgínica.
3. Si  $l_p$  es Grande Y  $a_p$  es Mediano Y  $l_t$  es Largo Y  $a_t$  es Largo Entonces Clase es Versicolor.
4. Si  $l_p$  es Grande Y  $a_p$  es Fino Y  $l_t$  es Largo Y  $a_t$  es Grande Entonces Clase es Versicolor.
5. Si  $l_p$  es Mediano Y  $a_p$  es Mediano Y  $l_t$  es Mediano Y  $a_t$  es Mediano Entonces Clase es Virginica.
6. Si  $l_p$  es Pequeña Y  $a_p$  es Mediano Y  $l_t$  es Fino Y  $a_t$  es Fino Entonces Clase es Setosa.

# CASOS DE ESTUDIO 3

## SISTEMA DE CONTROL PARA UN TANQUE



Las variables en el sistema son:

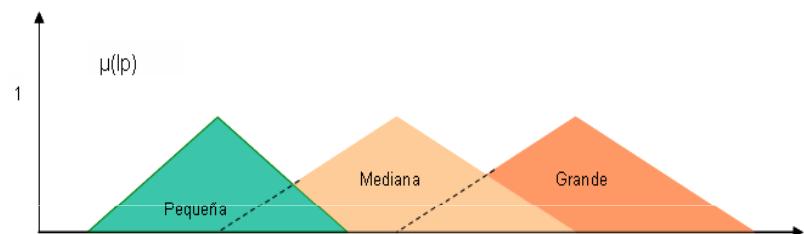
**Variables de entrada:** presión, válvula 1 y válvula 2.

**Variables de salida:** válvula 1 y válvula 2.

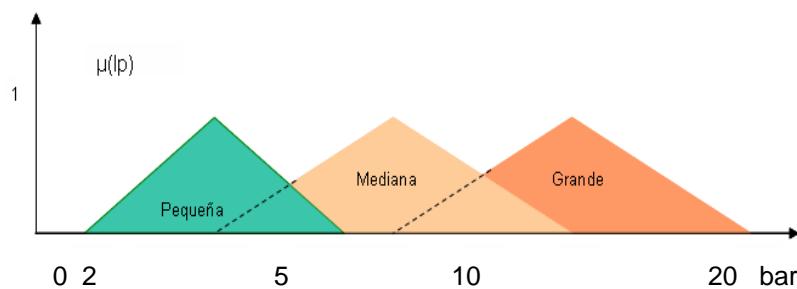
**Válvula 1 y Válvula 2:** tipo Enumerado, con valores difusos de apertura: mediana, grande, pequeña.

**Presión:** tipo entero, con un rango de variación entre 0 y 20, con valores difusos de presión: mediana, grande, pequeña.

# CASOS DE ESTUDIO 3



**Funciones de pertenencia para válvulas**



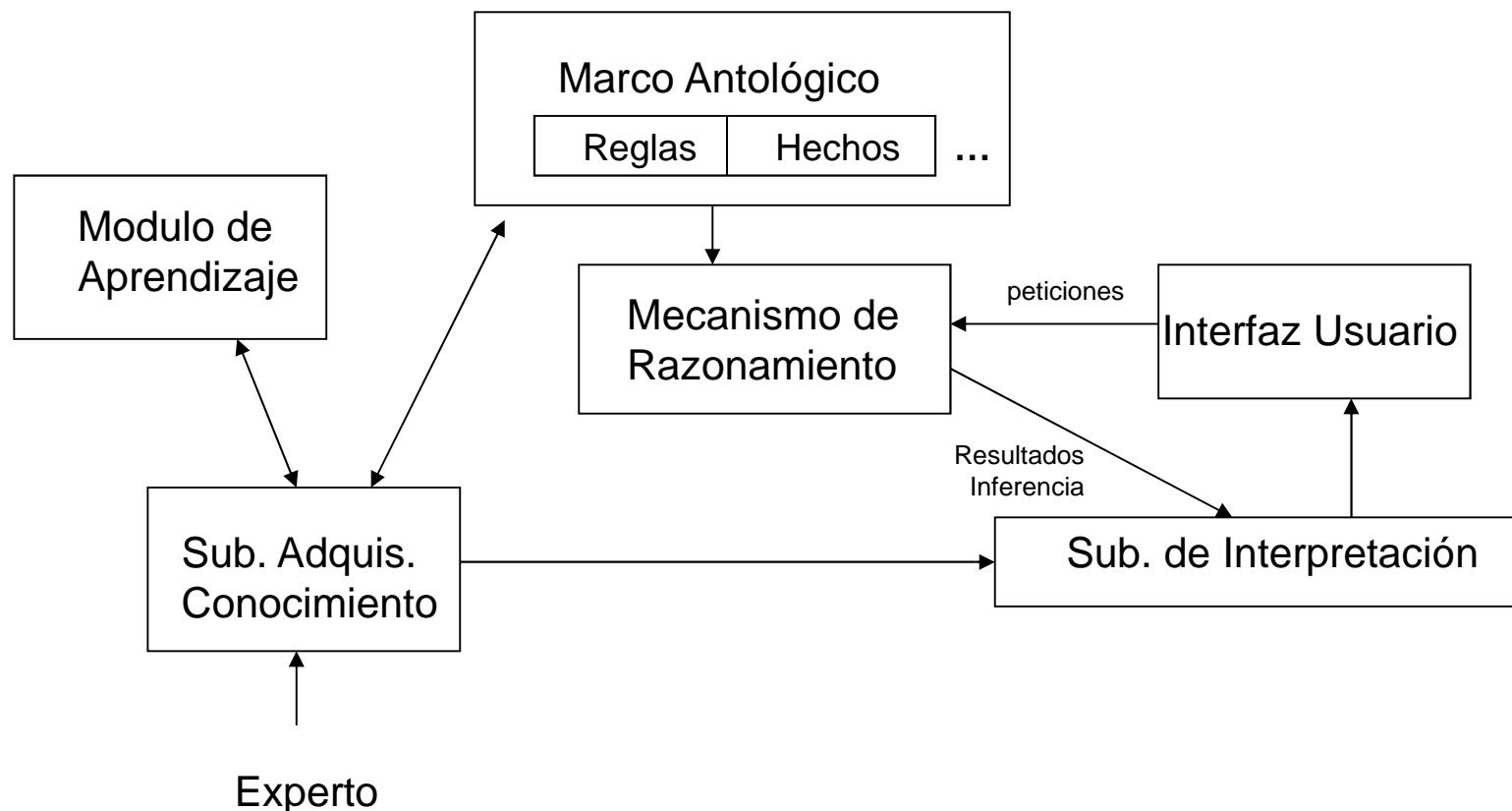
**Funciones de pertenencia para presión**

# CASOS DE ESTUDIO 3

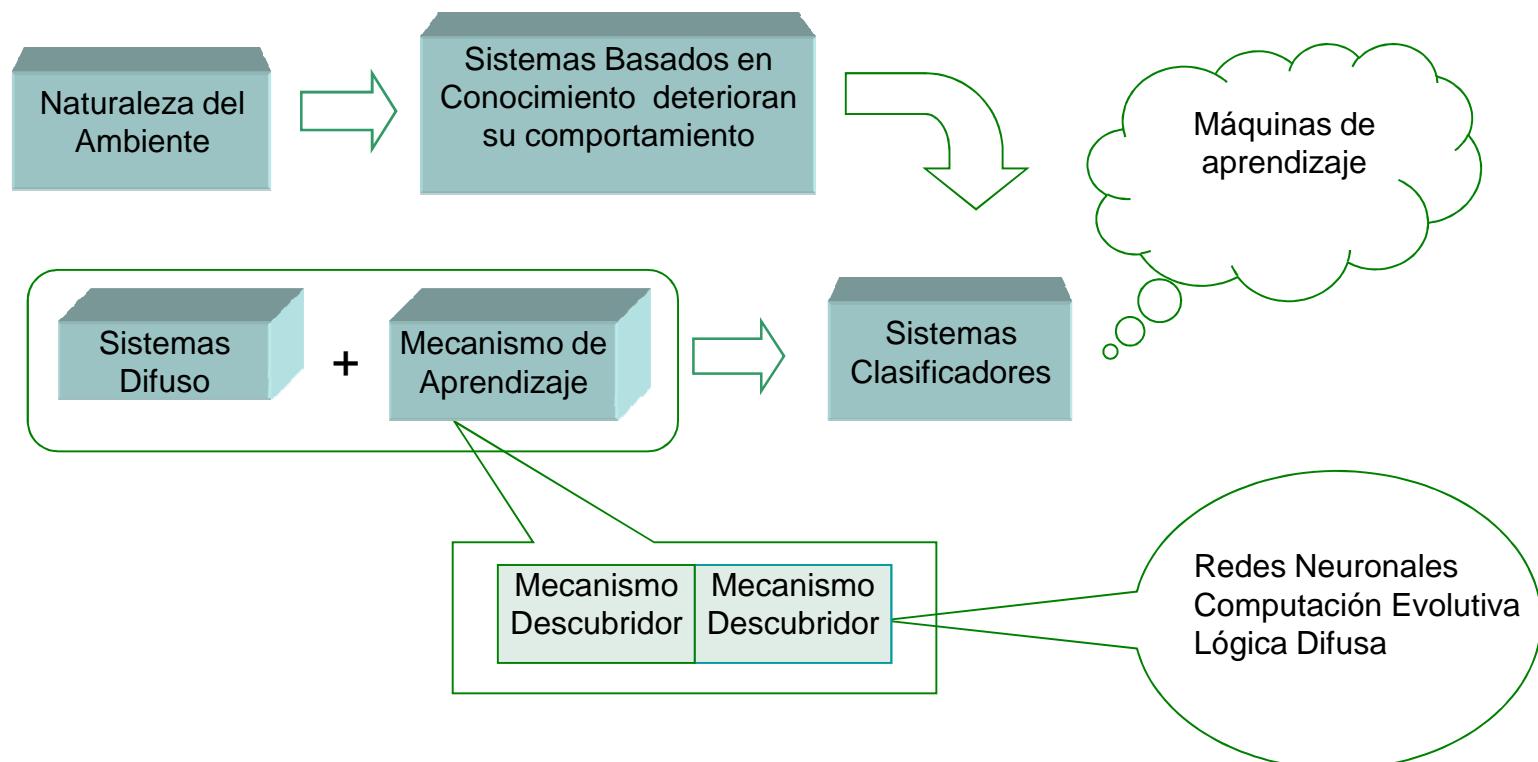
## SISTEMA DE CONTROL PARA UN TANQUE

1. Si Valvula1 == grande Y Valvula2 == grande Y Presión < 5 Entonces  
Valvula1 = mediana Y Valvula2 = pequeña.
2. Si Valvula1 == mediana Y Valvula2 == grande Y Presión > 10 Entonces  
Valvula1 =pequeña Y Valvula2 = grande.
3. Si Valvula1 == grande Y Valvula2 ==mediana Y Presión > 10 Entonces  
Valvula1 =pequeña Y Valvula2 = mediana.
4. Si Valvula1 == grande Y Valvula2 == mediana Y Presión >= 5 Y Presión  
<=10 Entonces Valvula1 = grande Y Valvula2 = pequeña.
5. Si Valvula1 == pequeña Y Valvula2 == grande Y Presión < 5 Entonces  
Valvula1 = grande Y Valvula2 = pequeña.
6. Si Valvula1 == pequeña Y Valvula2 == grande Y Presión < 5 Entonces  
Valvula1 = grande Y Valvula2 = pequeña.

# Sistemas Basados en Conocimiento

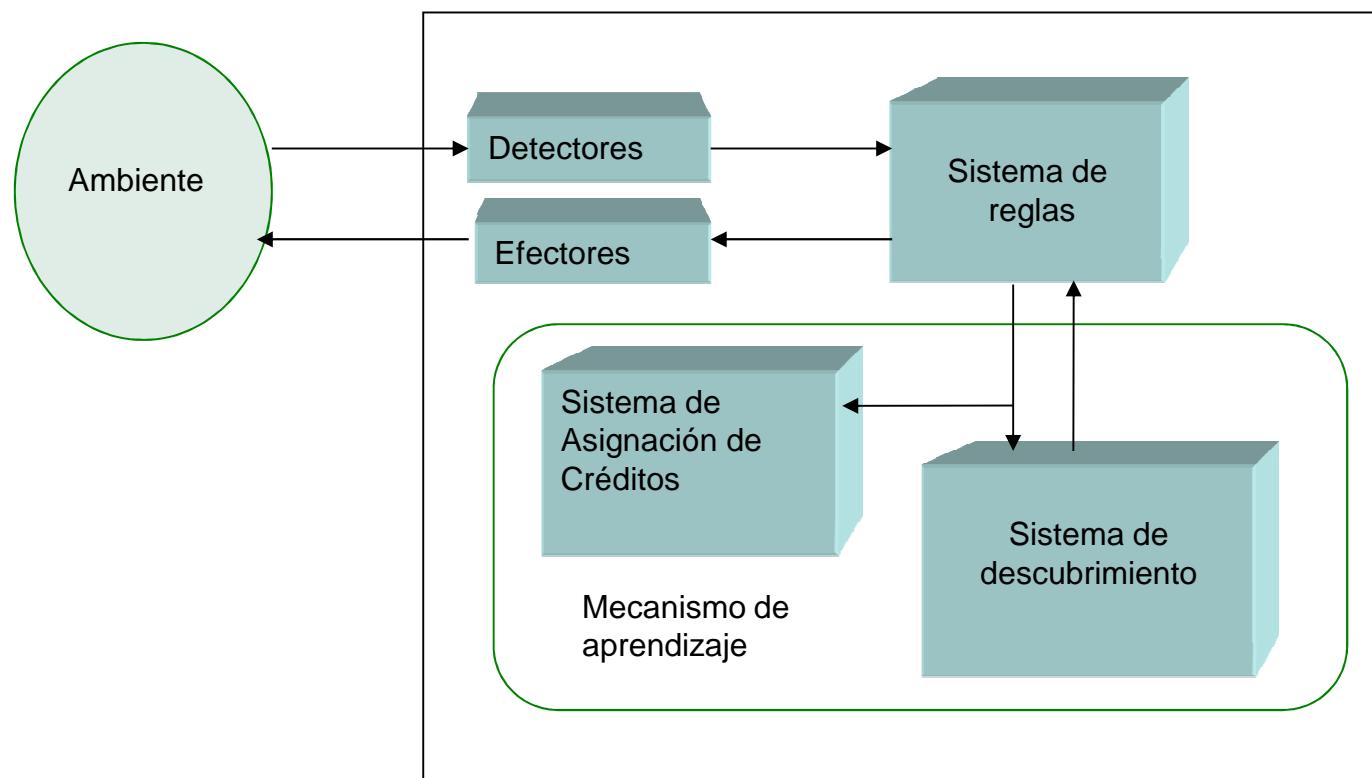


# Máquinas de Aprendizaje

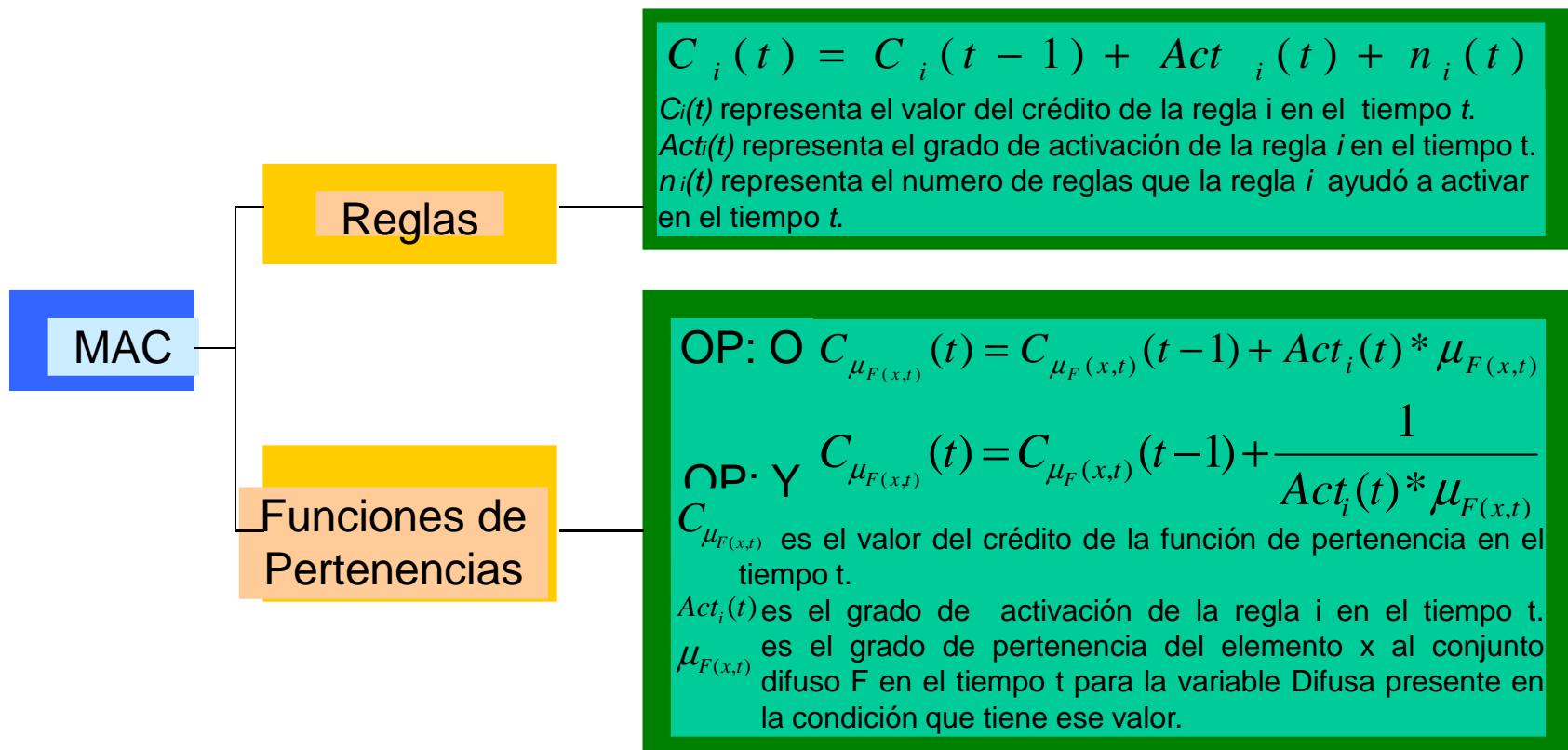


# SISTEMAS CLASIFICADORES

## Aprendizaje

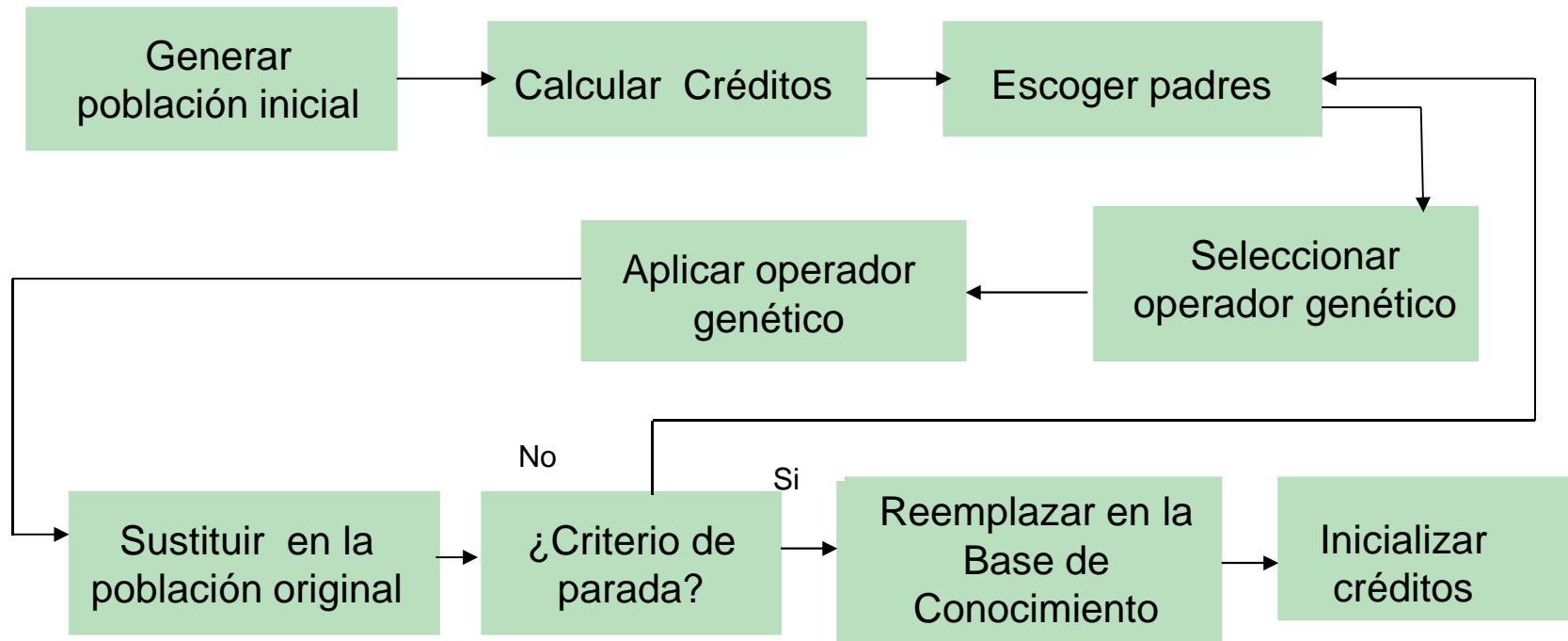


# Aprendizaje

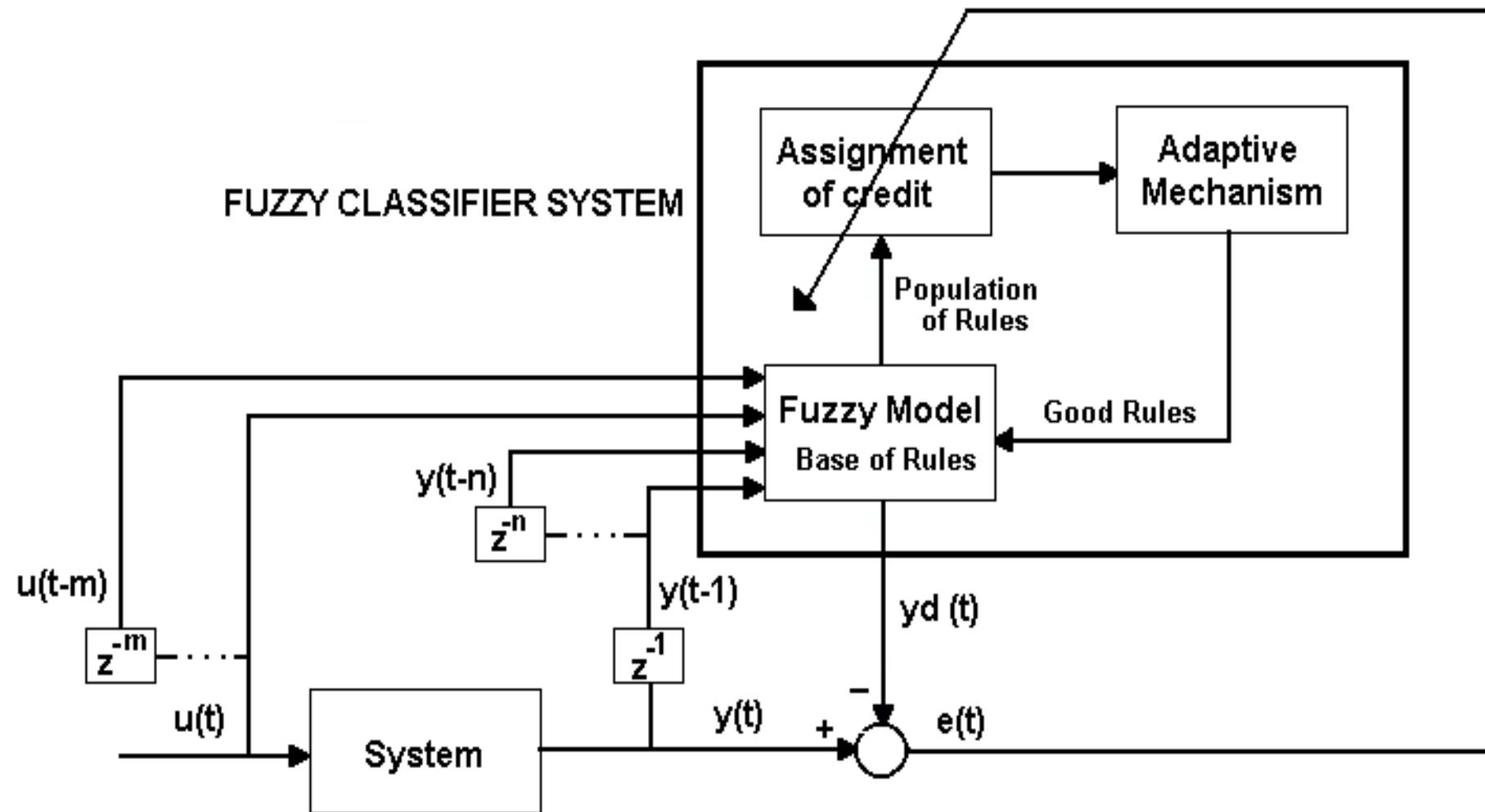


# Aprendizaje

## EVOLUCIÓN DE REGLAS



# Sist. Clasificador Difuso



# Sist. Clasificador Difuso

1. Calcular el **grado de activación** de c/regla.
2. Calcular el **crédito** de c/regla activada.
3. **Defuzificar** la salida obtenida del sistema difuso por el mecanismo de inferencia difuso.
4. Calcular el **error de identificación er**.
5. Calcular el error promedio  $ep$ , para todos los **patrones procesados**.
6. Si  $ep$  es mas grande que el error limite dado por el usuario, entonces el SCD usa el **mecanismo adaptativo** basado en AGs.
  - 6.1 **Escoger** como padres las reglas con alto créditos valor).
  - 6.2 Aplicar los **operadores genéticos**.
  - 6.3 **Reemplazar** los individuos viejos por nuevos, según algún mecanismo de reemplazo.

# Sist. Clasificador Difuso

Error de identificación para cada patrón.

$$er = |(y_s - y_d)/y_s|$$

$$ep = \sum_{i=1}^m er/m$$

$y_s$  salida sistema real  $y_d$  salida modelo,  $m$  numero de of patrones.

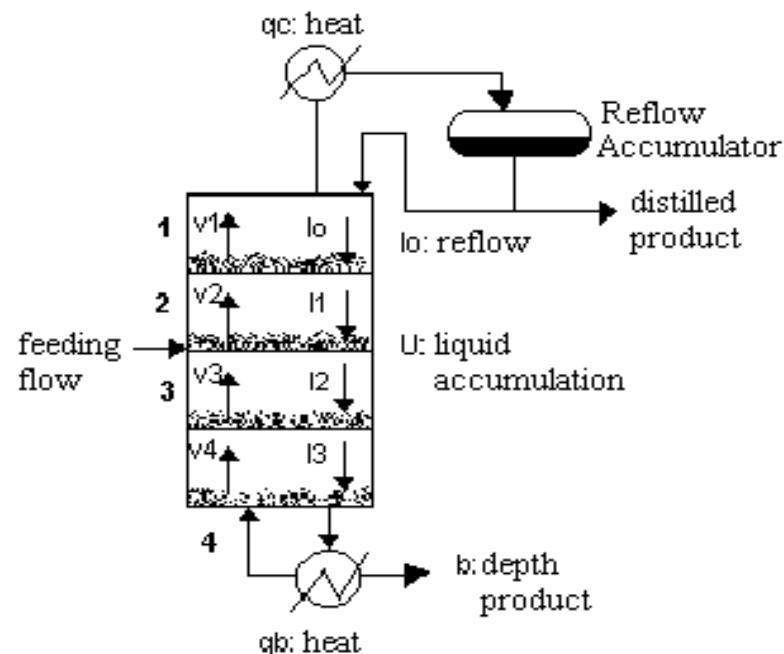
- **Funcion de calidad**

- $S_i(t+1) = S_i(t) + Act_i(t) * \mu y_i / ea$  (3)

$Act_i(t)$  grado de activación regla  $i$  en tiempo  $t$ ,  $ea$  es el error absoluto ( $ea = y_s - y_d$ ) y  $\mu y_i$  es el grado de membresía.

# EJEMPLO

- Sistema de destilacion: separar 2 mezclas en varias fracciones con diferentes puntos de ebullicion.



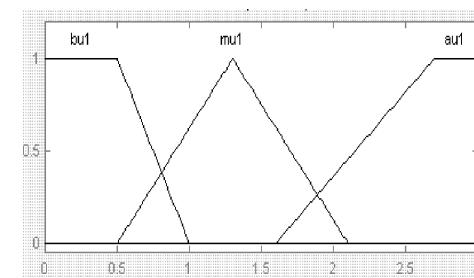
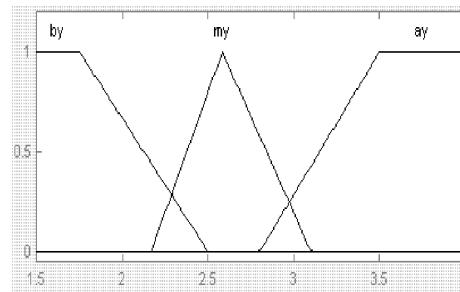
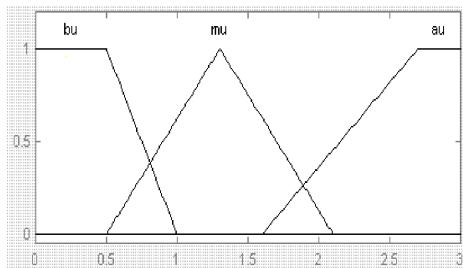
# EJEMPLO

- Señal de entrada constante con un paso de amplitud=10 ( $U(t) = 10$ ).
- Modelo teórico:

$$Y(t) = 1.1148*Y(t-1) + 0.2525*Y(t-2) - 0.3823*Y(t-3) + 0.3294e-4*U(t-1)$$

# EJEMPLO

- Estructura regla genérica:  
 $\text{If } U(t) \text{ and } Y(t-1) \text{ then } Y(t)$
- Función de Membrecía de  $U(t)$ ,  $Y(t-1)$  y  $Y(t)$ .



# EJEMPLO

- Diferentes experimentos para inicial población reglas.
- Se encontró para 87 iteraciones, mejor modelo difuso:

*If  $U(t)$  is  $mu$  and  $Y(t-1)$  is  $bu1$  then  $Y(t)$  is  $ay$*

*If  $U(t)$  is  $au$  and  $Y(t-1)$  is  $mu1$  then  $Y(t)$  is  $by$*

*If  $U(t)$  is  $mu$  and  $Y(t-1)$  is  $au1$  then  $Y(t)$  is  $my$*

*If  $i$   $U(t)$  is  $au$  and  $Y(t-1)$  is  $au1$  then  $Y(t)$  is  $ay$*

*If  $i$   $U(t)$  is  $mu$  and  $Y(t-1)$  is  $mu1$  then  $Y(t)$  is  $ay$*

*If  $i$   $U(t)$  is  $au$  and  $Y(t-1)$  is  $au1$  then  $Y(t)$  is  $my$*

*If  $i$   $U(t)$  is  $mu$  and  $Y(t-1)$  is  $bu1$  then  $Y(t)$  is  $my$*

*If  $i$   $U(t)$  is  $bu$  and  $Y(t-1)$  is  $mu1$  then  $Y(t)$  is  $my$*

*If  $i$   $U(t)$  is  $mu$  and  $Y(t-1)$  is  $mu1$  then  $Y(t)$  is  $by$*



UNIVERSIDAD  
DE LOS ANDES  
MERIDA VENEZUELA

# sistemas lógicos difusos temporales

Jose Aguilar Castro

# Lógica Difusa (tiempo)

- CLÁSICO:
  - NO CAMBIA FUNCIÓN DE PERTENENCIA
  - X CAMBIA EN EL TIEMPO
$$\mu_f(x^t) \text{ y } \mu_f(x^{t+1})$$
- DEPENDENCIA DEL TIEMPO:
  - FUNCIÓN DE PERTENENCIA CAMBIA EN EL TIEMPO
  - X CAMBIA EN EL TIEMPO
$$\mu_f^t(x^t) \text{ y } \mu_f^{t+1}(x^{t+1}) \text{ o } \mu_f(x^t, t) \text{ y } \mu_f(x^{t+1}, t+1)$$

# Lógica Difusa (tiempo)

- Tasa de Confidencia:

$$R_f = -v[(\mu_f(x^t) - \mu_f(x^{t+1}))/\delta t]$$

- Reglas temporales

- Si A es D y B es F y  $R_A < 2$  entonces C es G
- Si  $A^{t=1}$  es D y  $A^{t=2}$  es H y  $B^{t=2}$  es F y  
 $R_B^{t=1} < 5$  entonces C es G

# Modelos difusos dinámicos adaptativos

$R^1 : SI x_1 \text{ es } F_1^1 \text{ Y } \dots \text{ Y } x_n \text{ es } F_n^1 \text{ ENTONCES } y \text{ es } G^1$

- **Definición 1.** Una función de membresía es **dinámica** si su **estructura o parámetros dependen dinámicamente del tiempo**.
- **Definición 2.** Un modelo difuso es dinámico si sus **funciones de membresía son dinámicas**.

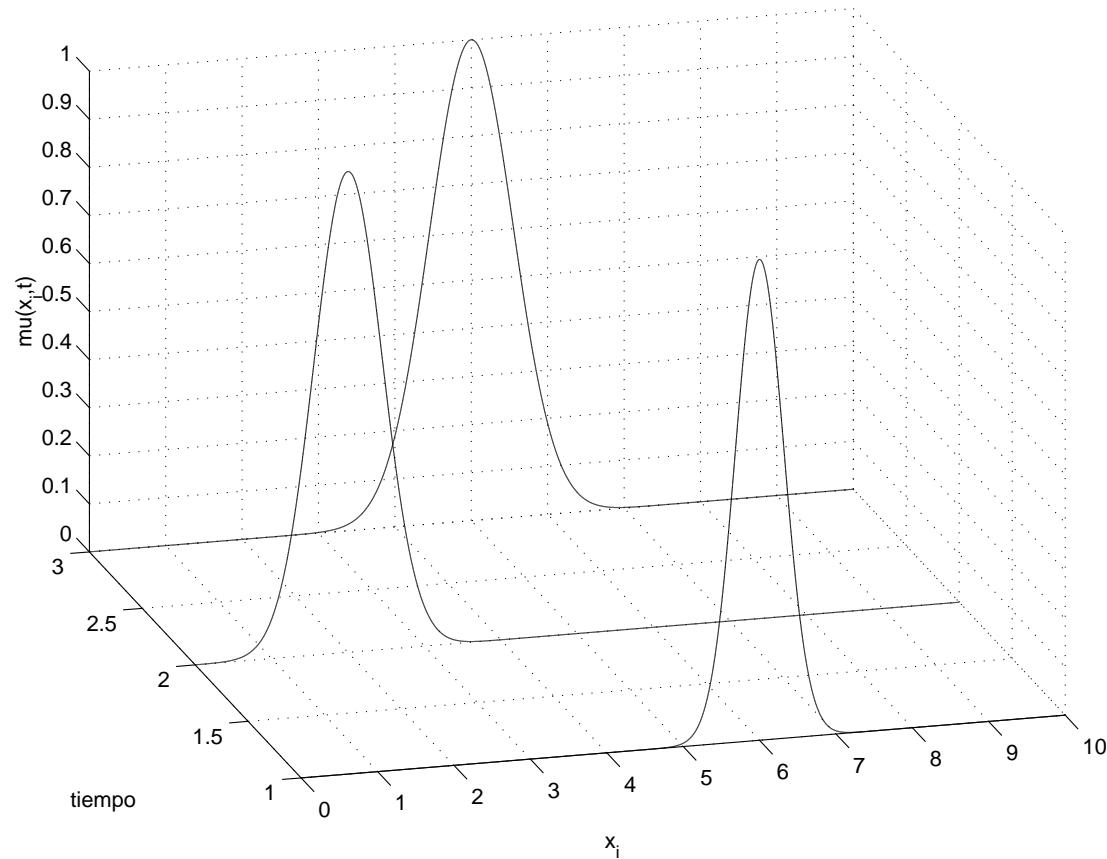
# Modelos difusos dinámicos adaptativos

- **Definición 3.** Sea  $x(t_j)$  el valor de la variable difusa  $x$  en el instante de tiempo  $t_j$ . La **función de membresía gausiana dinámica**  $\mu_F(x, t_j)$  que determina el grado de pertenencia de  $x(t_j)$  al conjunto difuso  $F$  sobre un universo de discurso  $U$ , se define como:

$$\mu_F(x, t_j) = \exp \left[ -\frac{(x(t_j) - \alpha(\underline{v}, t_j))^2}{\beta(\underline{w}, t_j)} \right]$$

donde  $\alpha(\underline{v}, t_j)$  y  $\beta(\underline{w}, t_j)$  son **funciones dependientes del tiempo**,  $\underline{v}$  y  $\underline{w}$  son vectores de **parámetros ajustables**,

# Modelos difusos dinámicos adaptativos



# Modelos difusos dinámicos adaptativos

- **Definición 4.** Sea  $y(t_j)$  el valor de la variable difusa  $y$  en el instante de tiempo  $t_j$ . El centro de la función de membresía dinámica que determina el grado de pertenencia de  $y(t_j)$  al conjunto difuso  $G$  sobre un universo de discurso  $V$ , es definida como  $\gamma(\underline{u}, t_j)$ , la cual es una función dependiente del tiempo,  $\underline{u}$  es un vector de parámetros ajustables,

# Modelos difusos dinámicos adaptativos

- **Definición 5.** Sean  $x_i(t_j)$  los valores de las variables de entrada  $x_i$  al MDAD en el instante de tiempo  $t_j$  para generar la salida  $y(t_j)$ . **Método de defusificación centro promedio**

$$y(\underline{X}, t_j) = \frac{\sum_{l=1}^M \gamma^l(\underline{u}^l, t_j) \left( \prod_{i=1}^n \exp \left[ -\frac{(x_i(t_j) - \alpha_i^l(\underline{v}_i^l, t_j))^2}{\beta_i^l(\underline{w}_i^l, t_j)} \right] \right)}{\sum_{l=1}^M \left( \prod_{i=1}^n \exp \left[ -\frac{(x_i(t_j) - \alpha_i^l(\underline{v}_i^l, t_j))^2}{\beta_i^l(\underline{w}_i^l, t_j)} \right] \right)}$$

# Modelos difusos dinámicos adaptativos

- **Definición 6.** La **estructura genérica** de las funciones  $\alpha^l(\underline{v}_i^l, t_j)$ ,  $\beta^l(\underline{w}_i^l, t_j)$  y  $\gamma^l(\underline{u}^l, t_j)$  del MDAD, vienen definidas por las ecuaciones siguientes:

$$\alpha(\underline{v}_i^l, \bar{x}_i(t_j)) = v_i^l \frac{\sum_{k=1}^j x_i(t_k)}{j} \quad , \quad \bar{x}_i(t_0) = x_i(0) \quad \gamma^l(\underline{u}^l, t_j) = u^l \bar{y}(t_j)$$

$$\beta_i^l(\underline{w}_i^l, \sigma^2_i(t_j)) = w_i^l \left( \frac{\sum_{k=1}^j (x_i(t_k) - \bar{x}_i(t_k))^2}{j+1} + \varepsilon \right) \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \sigma^2_i(t_0) = 0$$